Treball Acadèmicament Dirigit

Música i matemàtiques: una introducció al tractament matemàtic del so

Lucía Vañó Hernández

Directora: Dra. Pilar Bayer Isant

2 de juliol de 2012

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

Índex

1 Ones sonores **3**

1.1 Què és el so? 3

1.2 Qualitats perceptives del so 5

1.3 Les ones sinusoïdals i el so 14

1.3.1 La freqüència 16

1.3.2 El període 17

1.4 Els sons purs 18

1.5 Interpretació matemàtica dels acords 29

2 Ones i instruments **39**

2.0.1 Els harmònics 39

2.1 Afinació 44

2.1.1 El sistema pitagòric 45

2.1.2 El sistema temperat 48

3 Experimentem amb el *Mathematica*... **51**

3.0.3 ...creant instruments 51

3.0.4 ...interpretant partitures 55

4 Annexos **59**

4.1 Diccionari de sinònims 59

4.2 *Notebooks* del *Mathematica* 60

Presentació

En aquest Treball Acadèmicament Dirigit es pretén fer una introducció a les relacions entre les Matemàtiques i la Música, en el sentit de l'acústica. Concretament, s'ha fet ús del programa *Mathematica 8.0* i s'ha experimentat amb ell, per tal d'intentar treure'n el màxim de profit. En particular, hem intentat d'il·lustrar amb el programa tot allò que hem explicat matemàticament, i cap al final s'han fet uns petits experiments i s'han obtingut les conclusions pertinents.

El treball és fruit de moltes hores de feina, però sobretot d'unes llargues tardes de dilluns on la Dra. Bayer i jo ens hem endinsat en aquest gran món, que ens ha apassionat a totes dues, i que realment ens ha fet entendre moltes coses. Voldria, abans que res, agraïr-li l'haver acceptat a dirigir-me el treball. Sense ella, aquest treball no hagués estat possible!

Res més, espero que us agradi, li he dedicat molt del meu temps, i creiem que hem assolit els objectius que ens proposàvem.

Capítol 1

Ones sonores

1.1 Què és el so?

> **so** *m.* Impressió produïda en l'òrgan de l'oïda per les vibracions elàstiques d'un cos que es propaguen en tots els medis materials en forma d'ones. *Un so agut o alt. Un so greu o baix. L'altura o to d'un so. La intensitat d'un so. El timbre d'un so.* ([**?**])

El mitjà de transmisió de la música és el so. En termes de física, podem definir el so com qualsevol fenomen que involucri la propagació en forma d'ones elàstiques (a través d'un medi elàstic) generades pel moviment vibratori d'un cos. Com que les vibracions es produeixen en la mateixa direcció en què es propaga el so, les ones son longitudinals.

Com tot moviment ondulatori, podem representar el so com una suma de corbes sinusoïdals multiplicades pel factor d'amplitud. Aquestes corbes es poden caracteritzar per les magnituds i unitats de mesura de qualsevol ona de freqüència ben definida, que són:

- La longitud d'ona λ.
- La freqüència f, que és la inversa del període T: $f = \frac{1}{T}$.

- L'amplitud d'ona, A, que determina la quantitat d'energia que conté un senyal sonor.

Matemàticament, l' oscil·lació sonora pura es representa per la funció sinus:

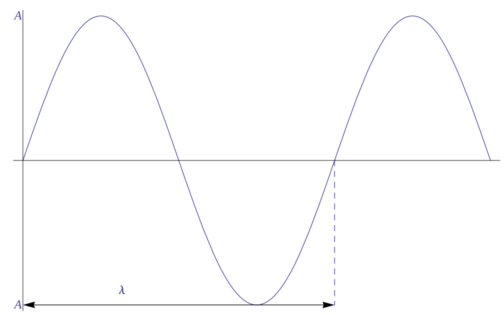


Figura 1.1: Oscil·lació sonora

L'oscil·lació sonora parteix d'una situació de repòs, i va creixent gradualment fins a arribar a la seva màxima amplitud (A). En aquest moment, comença a apropar-se l'estat de repòs, des d'on començarà la oscil·lació en la direcció contrària fins a una nova amplitud màxima (-A). En tornar al punt de repòs desde aquest punt, la ona haurà acomplert un cicle complet (λ).

Cal notar que un so no només està caracteritzat pels paràmetres mencionats anteriorment, ja que, en general, un so qualsevol és una combinació d'ones sonores que difereixen ens els cinc paràmetres anteriors. És a dir, podem representar un so pur com una funció sinusoïdal. En canvi, un so complex tindrà una representació gràfica més complexa (més endavant entrendrem perquè). En el cas dels sons complexos, hauríem d'estudiar, en particular:

(i) La potència acústica: ens indica la quantitat d'energia radiada en forma d'ones per unitat de temps per una font determinada. Depèn de l'amplitud.

(ii) L'espectre de freqüències: ens permet conèixer en quines freqüències es transmet la major part de l'energia.

Els so que percebem els humans consisteix en ones sonores que produeixen oscil·lacions de la pressió de l'aire, que es converteixen en ones mecàniques en l'oïda humana, que són percebudes pel cervell.

D'altra banda, el so ha estat sempre present a la vida quotidiana de les persones, en particular, la música. Al llarg de la història, l'ésser humà ha inventat una sèrie de regles per ordenar-lo, fins a elaborar un llenguatge musical.

1.2 Qualitats perceptives del so

El so, en combinació amb el silenci, és la matèria prima de la música.

Les ones sonores tenen quatre qualitats bàsiques, que depenen de com s'han percebut aquests sons. Aquestes són:

- Intensitat: és la amplitud d'ona. En aquest sentit, podem classificar un so com dèbil, fort o suau.
- Alçada: és determinada per la freqüència d'una ona.
- Timbre: fa referència a la forma de l'ona. Aquesta qualitat és totalment determinada per les característiques de la font emissora. En aquest sentit, el so por set metàl·lic, rugós...
- Duració: és el temps de vibració, que pot ser llarg o curt.

Considerem doncs la següent taula, que ens relaciona cada qualitat física del so amb la qualitat perceptiva:

Física	**Perceptiva**
Amplitud	Intensitat
Freqüència	Alçada
Espectre	Timbre
Duració	Temps

Taula 1.1: Taula de qualitats del so

Tot seguit, donarem una breu descripció de cadascuna de les qualitats perceptives.

L'alçada

Físicament parlant, fa referència a la freqüència d'ona. Podem classificar els sons en aquest àmbit com aguts, mitjans i greus.

Aquesta qualitat és determinada per la freqüència d'oscil·lació de les ones sonores, mesurada en cicles per segon (s) o hertz (Hz). Entenem per cicle com la repetició d'un succés.

És a dir:

$$f = \frac{1}{T} = Hz = \frac{1}{s}.$$

Aquí, T denota el període, que és la duració d'un cicle durant un moviment repetitiu. Per tant, un *hertz* és la freqüència d'una partícula que participa en l'oscil·lació d'un període per segon.

Tenim doncs que, segons aquestes definicions, a la baixa freqüència d'oscil·lació li corresponen sons greus, i a la alta, sons aguts. Observem els gràfics:

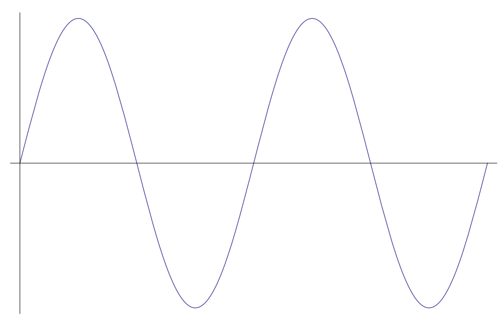


Figura 1.2: So greu

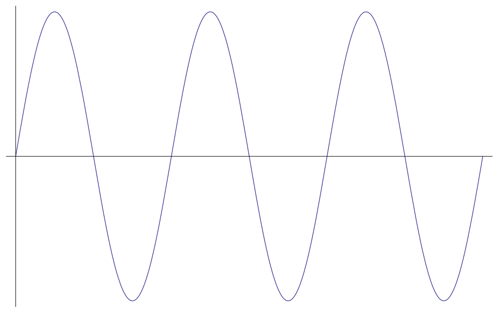


Figura 1.3: So mitjà

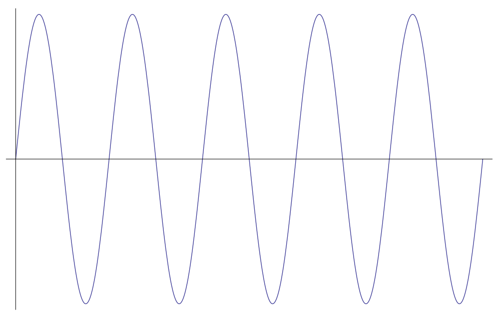


Figura 1.4: So agut

L'espectre de freqüències que l'oïda humana pot detectar (és a dir, la *freqüència audible*) depèn de cada persona, i pot variar sobretot en funció de la edat. Tot i això, podem dir que la nostra oïda abarca un total d'onze octaves.

Observem aquesta taula, on s'indica l'interval de *Hz* per a cada octava que la nostra oïda por percebre:

1a octava	16–32 Hz
2a octava	32–64 Hz
3a octava	64–125 Hz
4a octava	125–250 Hz
5a octava	250–500 Hz
6a octava	500–1.000 Hz
7a octava	1.000–2 000 Hz
8a octava	2.000–4 000 Hz
9a octava	4.000–8.000 Hz
10a octava	8.000–16.000 Hz
11a octava	16.000–32.000 Hz

Taula 1.2: Rang de percepció de l'oïda humana

Normalment, l'oïda humana percep entre 20 i 20.000 Hz. És a dir, els extrems d'aquesta taula són perceptibles per al cos, però no per l'oïda. Al emetre's un so fora d'aquest interval, el nostre cos pot experimentar sensacions, pero l'oïda no capta res, ja que la membrana del timpà no vibra.

Com a curiositat, aquí tenim una taula dels rangs de percepció sonora per diferents animals:

Espècie	Rang (Hz)
Tortuga	20-1 000 Hz
Peix	100-2 000 Hz
Granota	100-3 000 Hz
Colom	200-10 000 Hz
Humà	20-20 000 Hz
Ximpanzé	100-20 000 Hz
Conill	300-45 000 Hz
Gos	50-46 000 Hz
Gat	30-50 000 Hz
Porc	150-50 000 Hz
Ratolí	1 000-100 000 Hz
Ratpenat	1 000-60 000 Hz
Dofí	1 000-130 000 Hz

Taula 1.3: Percepció sonora per diferents animals

De fet, la freqüència ens determina la nota que està sonant. Farem ara un breu repàs històric dels principals referents en aquest aspecte.

A la música occidental es van anar establint tons determinats, anomenats notes, que es van ordenar en una seqüència de 12. Aquesta seqüència es va repetint formant octaves, i en cadascuna d'aquestes es duplica la freqüència.

Cal mencionar Guido d'Arezzo. D'Arezzo va ser un monge benedictí, que era un teòric musical i una de les figures centrals de la música a l'Edat Mitjana. El que va fer d'Arezzo va ser millorar la escriptura musical, sobretot amb la implementació de les línies horitzontals que fixaren les alçades dels sons (pràcticament semblant al nostre sistema actual). També va ser el responsable de posar els noms a les notes musicals. Durant l'Edat Mitjana, les notes s'anomenaven segons les primeres lletres de l'alfabet: A, B, C, D, E, F, G (començant per l'actual nota *la*). Durant aquella època, es cantava un himne dedicat a Sant Joan Baptista, anomenat *Ut queant laxis*, que tenia la particularitat que cada frase musical començava amb una nota superior a la precedent. D'Arezzo va agafar la primera síl·laba de cada frase i la va identificar amb les notes amb les que s'entonaven. Així, es va crear el sistema de notació musical actual. En un principi, denominà "solsminació"(en llatí, *solmisatio*) aquest sistema d'entonació, que, més endavant, es denominà solfeig.

El timbre

Podem dir que aquesta qualitat dóna "personalitat"al so. És a dir, el timbre ens permet distingir dos sons, per exemple, entre la mateixa nota amb igual intensitat produïda per dos instruments musicals diferents (recordem que cada cos sonor vibra de manera diferent). Les diferències sonores no solament es donen per la naturalesa del cos sonor (fusta, metall...), sinó també per la manera en què es fa sonar. Més tard estudiarem l'importància dels hàrmonics.

Amb la veu humana passa el mateix: la veu d'un home, d'una dona i d'un nen tenen diferents timbres (com el tenen també els de les diferents persones).

La intensitat

És la quantitat d'energia que conté un so, és a dir, la quantitat d'energia acústica que desenvolupa una ona longitudinal per unitat de temps. La intensitat, que també podem anomenar-la potència acústica, depèn de l'amplitud d'aquesta ona: a major volum, major amplitud d'ona.

Així doncs, podem dir que aquesta qualitat ens permet distingir si un so est fort o fluix.

La unitat de mesura de la potència acústica és el *bel·li*, tot i que a la pràctica, s'utilitza el decibel·li (dB), que és la dècima part d'un bel·li. En el seu disseny, es va tenir en compte que la sensibilitat en l'oïda humana davant l'intensitat segueix una escala aproximadament logarítmica: és a dir, per a intensitats relativament altes, la nostra oïda experimenta un alt grau de rebuig. L'escala d'intensitat parteix dels 0 dB i arriba fins al 120 o 149 dB, on se situa el llindar del dolor.

Posem alguns exemples d'activitats que generen soroll i la seva aproximació a la intensitat:

120-140 dB	Llindar del dolor
120 dB	Un motor d'avió
100 dB	Una orquestra simfònica. Una discoteca
90 dB	Una avinguda molt transitada
80 dB	Un ferrocarril
70 dB	Una orquestra de metall
50 dB	Una orquestra de cordes
40 dB	Una conversa normal
20 dB	Una biblioteca
10 dB	Respiració tranquila
0 dB	Llindar de l'audició

Taula 1.4: Exemples sonors amb les seves intensitats

El *llindar diferencial* (o, dit d'una altra manera, el *nivell de sensació*) ens relaciona la freqüència i la intensitat d'un so. Podem definir aquest concepte com la petita diferència que hi ha entre dos notes successives, i que una persona pot diferenciar amb un 75% de possibilitats, depenent de si el so és agut o greu. En aquest cas, aquesta diferenciació depèn de la intensitat i la freqüència sonores. Observem la següent taula, cf.[**?**], que ens compara intensitat i freqüència. La taula està mesurada en *cents*, on:

1200 *cents*= 1 octava.

Freqüència	Intensitat (dB)										
(Hz)	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90
31	220	150	120	97	76	70					
62	120	120	94	85	80	74	61	60			
125	100	73	57	52	46	43	48	47			
250	61	37	27	22	19	18	17	17	17	17	
550	28	19	14	12	10	9	7	6	7		
1.000	16	11	8	7	6	6	6	6	5	5	4
2.000	14	6	5	4	3	3	3	3	3	3	
4.000	10	8	7	5	5	4	4	4	4		
8.000	11	9	8	7	6	5	4	4			
11.700	12	10	7	6	6	6	5				

Taula 1.5: Comparació entre freqüència i intensitat en *cents*

Per tal d'entendre millor aquests resultats, he calculat amb el *Mathematica* la taula equivalent en proporció d'octava: és a dir, considerant que una octava té 6 tons (5 tons i 2 semitons), he fet una regla de tres i he calculat la proporció dels cents anteriors sobre els 6 tons de la octava.

F	Intensitat (dB)										
(Hz)	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90
31	1.1	0.75	0.6	0.49	0.38	0.35					
62	0.6	0.6	0.47	0.43	0.4	0.37	0.31	0.3			
125	0.5	0.37	0.29	0.26	0.23	0.22	0.24	0.24			
250	0.31	0.19	0.16	0.14	0.11	0.1	0.09	0.09	0.09	0.09	
550	0.14	0.1	0.07	0.06	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04		
1 000	0.08	0.06	0.04	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02
2 000	0.07	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	
4 000	0.05	0.04	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02		
8 000	0.06	0.06	0.04	0.04	0.03	0.03	0.02	0.02			
11 700	0.06	0.05	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03				

Taula 1.6: Comparació entre freqüència i intensitat en proporció d'octava

En aquests resultats observem que si el so és molt fluix o molt greu, a la oïda humana li costa molt distingir els petits canvis d'afinació d'una mateixa nota (és a dir, el llindar diferencial és molt dèbil). Quan més fort i més agut és un so, més fàcil ens és veure aquesta pe-

Negres per minut	Expressió italiana
40-43	Grave
44-47	Largo
48-51	Larghetto
52-54	Adagio
55-65	Andante
66-69	Andantino
70-95	Moderato
96-112	Allegretto
113-120	Allegro
121-140	Vivace
141-175	Presto
176-208	Prestissimo

Taula 1.7: Indicació de temps

tita diferència (dit d'una altra manera, el llindar diferencial és més fort).

La duració

La duració és el temps durant el qual es manté un so. Els únics instruments acústics que poden mantenir el so el temps que vulguin són els de corda i els de vent. Els primers depenen, en general, del moviment de l'arc, i els segons de la capacitat pulmonar.

D'altra banda, tenim una notació per tal de definir la velocitat amb què s'ha d'interpretar una obra musical. En termes generals, aquesta notació es basa en escriure el nombre de negres que interpretarem per minut. Tot seguit mostrem una taula on s'estableixen aquestes notacions metronòmiques amb les indicacions del temps en italià (que són les indicacions usades habitualment en la composició musical).

Aquestes indicacions van situades habitualment a l'inici de les partitures musicals, just a dalt del primer pentagrama. De vegades, l'autor especifica el nombre exacte de negres per minut.

1.3 Les ones sinusoïdals i el so

Arribats a aquest punt, ens fem la pregunta següent: perquè les ones sonores tenen forma sinusoïdal? La resposta recau en l'equació diferencial ordinària (EDO) definida per als moviments harmònics simples. Considerem doncs la següent equació diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y$$

Les solucions d'aquesta EDO són:

$$y = A\cos(t\sqrt{\kappa}) + B\sin(t\sqrt{\kappa}). \tag{1.3.1}$$

Equivalentment,

$$y = \sin(t\sqrt{\kappa} + \phi).$$

En tenir present la llei de Newton ($F = ma$), aquesta equació representa què li passa a un objecte de massa 1 que, després de ser sotmès a una força, cerca la posició d'equilibri, on la magnitud de la força és proporcional a aquesta posició d'equilibri.

En el cas de la oïda humana, aquesta equació s'ha d'interpretar més aviat com una aproximació a la equació del moviment d'un punt fixat de la membrana del nostre timpà (anomenada *membrana basilar*). Hem de tenir diverses consideracions, ja que aquesta aproximació no és gaire acurada:

- Primer, caldria tenir en compte una altra equació diferencial que ens descrivís el moviment de la superfície de la membrana basilar (aquest factor no ens afecta gaire els resultats, exceptuant la constant κ).
- D'altra banda, el moviment de la nostra membrana té el factor de l'amortiguació, que és proporcional a la velocitat de la força donada. També cal notar que la membrana no és perfectament elàstica!
- Un altre factor a tenir en compte és que, per a la majoria de sons, la força de restauració cap al punt d'equilibri no té perquè ser lineal. Això té a veure sobretot amb la font acústica en qüestió.

- Per últim, cal dir que la majoria de les notes musicals no es poden representar amb una sola ona sinusoïdal. Per exemple, si pincem una corda, obtindrem una ona periòdica, pero la majoria de vegades consistirà en una suma d'ones sinusoïdals de diferents amplituds. Per tant, hi hauran diferents límits d'amplitud de la vibració de la membrana basilar, i s'enviarà un senyal més complex al cervell.

Cal notar també que, per exemple, els acords i les notes que toquen alhora també tenen ones més complexes. En els apartats següents estudiarem alguns d'aquests casos. La descomposició d'una ona periòdica com a suma d'ones sinusoïdals forma part de l'*Anàlisi de Fourier*.

Ara, ens plantegem les següents preguntes:

Què representen els paràmetres A, B i κ de la nostra equació?

Quines qualitats de la ona ens determinen?

A simple vista, observem que la nostra equació diferencial ordinària té infinites solucions, fixat un κ. Llavors, A i B depenen de les condicions ambientals (és a dir, del medi on s'emet el so)?

Farem unes petites comprovacions amb el *Mathematica* per obtenir alguna conclusió temporal (ja que a mesura que avancem en el treball, molts d'aquests dubtes se'ns aniran resolent matemàticament).

Observem primer les solucions per t que ens proporciona el *Mathematica* d'aquesta EDO, en funció dels paràmetres A, B i κ.

```
Solve[A Cos[Sqrt[k] t] + B Sin[Sqrt[k] t] == 0, {t}]
{{t -> -(ArcCos[-(B/Sqrt[A^2 + B^2])]/Sqrt[k])},
{t ->ArcCos[-(B/Sqrt[A^2 + B^2])]/Sqrt[k]},
{t -> -(ArcCos[B/Sqrt[A^2 + B^2]]/Sqrt[k])},
{t -> ArcCos[B/Sqrt[A^2 + B^2]]/Sqrt[k]}}
```

Estudiarem aquestes solucions fixant els paràmetres donats.

1.3.1 La freqüència

Observem què passa si, per exemple, fixem A i B i variem κ. Implementem la funció al *Mathematica*, que ens determina les solucions de la nostra EDO:

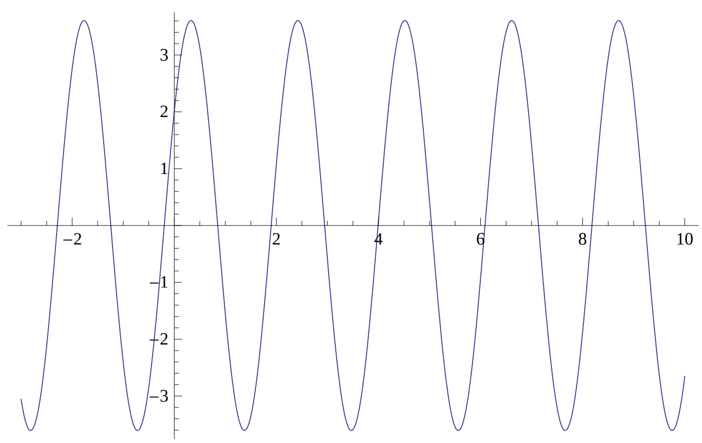
```
F[t_, A_, B_, k_] := (A Cos[Sqrt[k]t] + B Sin[Sqrt[k]t])
```

Apliquem la comanda *Plot* per dibuixar aquesta funció amb diferents paràmetres.

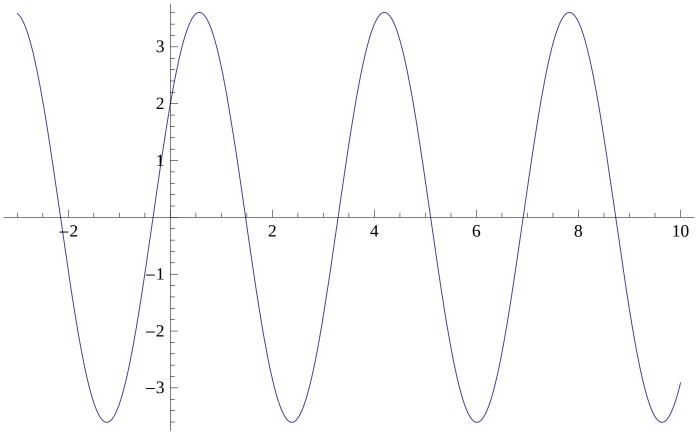
```
G[t_, A_, B_, k_] := Plot[F[t, A, B,  k], {t, -3, 10}]
```

Ara, dibuixem la funció per diferents valors de κ:

```
G[t, 2, 3,  9]
```

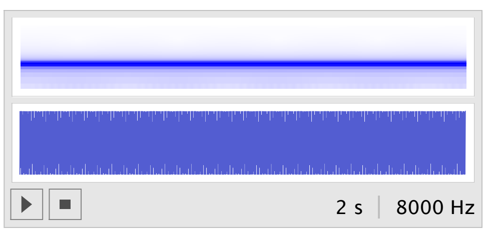



```
G[t, 2, 3, 3]
```

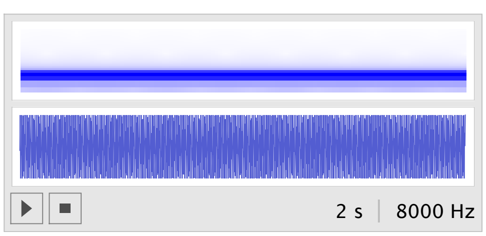


Observem que al augmentar el valor de κ obtenim una ona amb més freqüència, és a dir, una nota més aguda. Comprovem-ho amb el programa, usant el paquet *Music*, i la comanda *Play*, podem escoltar aquestes funcions i comprovar que, efectivament, la primera és més greu que la segona.

```
<< Music‘
Play[F[440 t, 2, 3,  9], {t, 0, 2}]
```




```
Play[F[440 t, 2, 3,  3], {t, 0, 2}]
```



És a dir, podem afirmar que si κ tendeix a ∞, el so que escoltem és més agut. Per tant, κ és determinada en funció de la freqüència del nostre so. En els apartats següents veurem qui és exactament aquesta κ.

1.3.1 Observació. Observem que a l'executar la comanda *Play* del *Mathematica*, ens surt un quadre de reproducció de sons. A baix a la dreta del quadre s'ens indica quants segons durarà el nostre so (el temps el determinem nosaltres al definir la funció).També ens indica els nombre màxim de *Hz* que pot emetre el programa, que són exactament 8.000 *Hz*.

1.3.2 El període

Tot seguit farem un estudi de com està reflectit en les nostres solucions el període de la nostra ona sonora. Tenim l'expressió **??** per a les nostres ones sonores:

$$A\cos(t\sqrt{\kappa}) + B\sin(t\sqrt{\kappa})$$

que la podem escriure com:

$$A\cos(t\sqrt{\kappa} + 2\pi) + B\sin(t\sqrt{\kappa} + 2\pi)$$

El període p, per definició, haurà de satisfer l'equació:

$$\sqrt{\kappa}(t+p) = \sqrt{\kappa}t + 2\pi.$$

Aïllant p, obtenim:

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

També podem resoldre la equació anterior amb el *Mathematica*:

```
Solve[Sqrt[k] (t + p) - Sqrt[k] t - 2 Pi == 0, {p}]
{{p -> (2 \[Pi])/Sqrt[k]}}
```

D'aquesta manera, queda determinada també κ en funció del període, tal i com havíem previst a l'apartat anterior (recordem que la freqüència f, mesurada en Hz, és la inversa del període p). Aïllant de l'expressió anterior i substituint p per $\frac{1}{f}$:

$$\frac{\sqrt{\kappa}}{2\pi} = f$$

És a dir:

$$\kappa = (2\pi f)^2$$

1.4 Els sons purs

Arribats a aquest punt, ens preguntem: quin paper tenen les constants A i B de la nostra solució? Fem un petit estudi per veure si arribem a alguna conclusió.

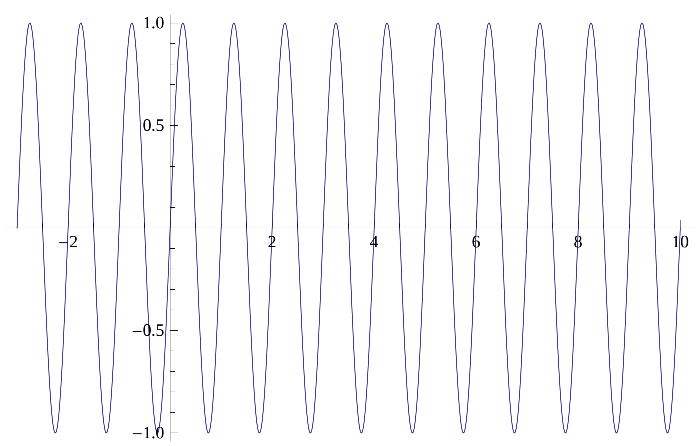
Tenim que qualsevol so pur el podem representar amb la funció sinus:

$$\sin(f \times 2\pi t),$$

on f es la freqüència del nostre so.

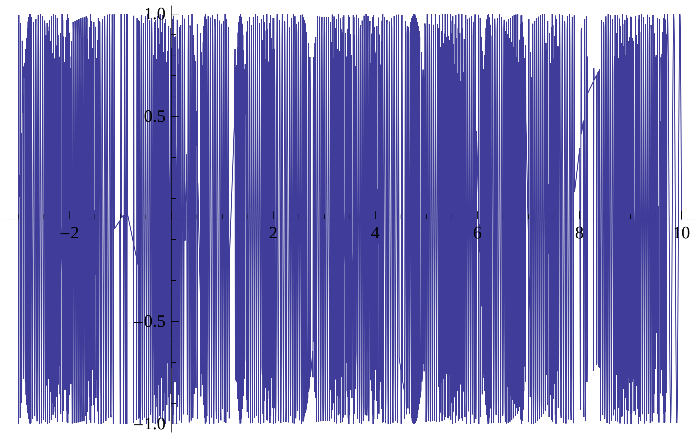
Dibuixem-lo amb el *Mathematica*

```
Plot[Sin[2*Pi t], {t, -3, 10}]
```



En particular, el la3 (el la d'enmig del piano, el que ve determinat per 440 *Hz*) té aquesta forma:

```
Plot[Sin[440*2*Pi t], {t, -3, 10}]
```



En aquest gràfic observem que el dibuix de la nostra funció sinusoïdal queda representada amb tanta freqüència que no podem distingir les corbes sinusoïdals. Té prou sentit que el dibuix ens quedi així, ja que la nostra oïda percep els sons de forma uniforme, i no com a sons ondulatoris.

Comparem aquest resultat amb la nostra expressió per a les ones sonores generals. Tenim el la3 pur definit per la funció:

$$\sin(440 \times 2\pi t).$$

D'altra banda, considerem de nou la expressió general **??**. Si prenem $A = 0$ i $B = 1$, el resultat anterior es redueix a:

$$\sin(t\sqrt{\kappa})$$

Igualant amb la expressió anterior, tindrem que:

$$t\sqrt{\kappa} = 440 \times 2\pi t$$

És a dir:

$$\kappa = (440 \times 2\pi)^2.$$

Efectivament, aquests càlculs coincideixen amb la definició de κ donada anteriorment.

	C	C ♯	D	E ♭	E	F	F ♯	G	G ♯	A	B ♭	B
0	16.35	17.32	18.35	19.45	20.60	21.83	23.12	24.50	25.96	27.50	29.14	30.87
1	32.70	34.65	36.71	38.89	41.20	43.65	46.25	49.00	51.91	55.00	58.27	61.74
2	65.41	69.30	73.42	77.78	82.41	87.31	92.50	98.00	103.8	110.0	116.5	123.5
3	130.8	138.6	146.8	155.6	164.8	174.6	185.0	196.0	207.7	220.0	233.1	246.9
4	261.6	277.2	293.7	311.1	329.6	349.2	370.0	392.0	415.3	440.0	466.2	493.9
5	523.3	554.4	587.3	622.3	659.3	698.5	740.0	784.0	830.6	880.0	932.3	987.8
6	1047	1109	1175	1245	1319	1397	1480	1568	1661	1760	1865	1976
7	2093	2217	2349	2489	2637	2794	2960	3136	3322	3520	3729	3951
8	4186	4435	4699	4978	5274	5588	5920	6272	6645	7040	7459	7902

Figura 1.5: Notació per freqüències de *The Acoustical Society of America*

1.4.1 Observació. El *Mathematica* no utilitza la notació musical franco-belga, que és la notació on s'anomena el la3 al la d'enmig del piano (és a dir, el la de 440 Hz). En un principi, vaig pensar que el programa usava la notació formulada per *The Acoustical Society of America*, que determina aquest la com el la4. A mesura que he anat avançant en el treball, m'he adonat que no coincideix amb aquesta notació. Més a baix resumirem la notació del programa.

Tot seguit mostrem una taula amb les notes de l'escala musical (determinant cada nota amb la seva freqüència) i la seva notació en aquest conveni, que és el que usarem al llarg d'aquest treball.

El *Mathematica* fa una barreja d'aquestes dues notacions: enlloc de començar la taula anterior per el C (el do), comença pel la. Efectivament:

```
A4

440.

B4

493.883
```

```
 G3

391.995

 F3

349.228
```

Per tant, el *Mathematica* segueix la notació:

	A	B ♭	B	C	C ♯	D	E ♭	E	F	F ♯	G	G ♯
0	27.50	29.14	30.87	32.70	34.65	36.71	38.89	41.20	43.65	46.25	49.00	51.91
1	55.00	58.27	61.74	65.41	69.30	73.42	77.78	82.41	87.31	92.50	98.00	103.8
2	110.0	116.5	123.5	130.8	138.6	146.8	155.6	164.8	174.6	185.0	196.0	207.7
3	220.0	233.1	246.9	261.6	277.2	293.7	311.1	329.6	349.2	370.0	392.0	415.3
4	440.0	466.2	493.9	523.3	554.4	587.3	622.3	659.3	698.5	740.0	784.0	830.6
5	880.0	932.3	987.86	1047	1109	1175	1245	1319	1397	1480	156	1661
6	1760	1865	1976	2093	2217	2349	2489	2637	2794	2960	3136	3322
7	3520	3729	3951	4186	4435	4699	4978	5274	5588	5920	6272	6645

Figura 1.6: Notació per freqüències del *Mathematica*

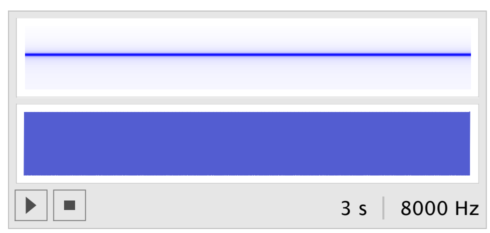
Usant el *Mathematica*, hem escrit l'escala musical, començant per el la4 (el la central del piano):

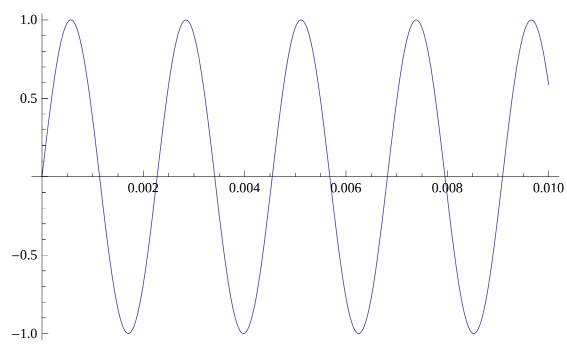
Primer, hem determinat la freqüència de cada nota (el *Mathematica* associa a cada nota, en la notació anterior, la seva freqüència per defecte), i després, usant l'ordre *Play*, hem reproduït els sons, usant la expressió **??**, que ja l'havíem entrat anteriorment. Hem calculat la κ corresponent a cada nota usant la fórmula anterior, i hem reproduït els sons durant 3 segons.

1.4.2 Observació. Al peu de cada figura on represento la nota en la partitura, he escrit com s'anomenen les notes en funció de les notacions que hem vist abans: MT correspon a la notació del *Mathematica*, ASM correspon a la notació de *The Acoustical Society of America* i FB correspon a la notació Franco-Belga, que 'es l'habitual per nosaltres.

Figura 1.7: MT=A4, ASM=A4, FB=A3

```
A4

440.

(440*2 Pi)^2

774400 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (440*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```





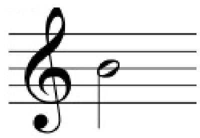
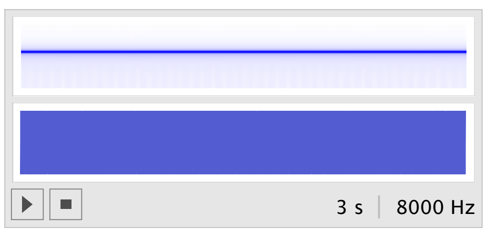


Figura 1.8: MT=B4, ASM=B4, FB=B3

```
B4

493.883

(493*2 Pi)^2

972196 [Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (493*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```



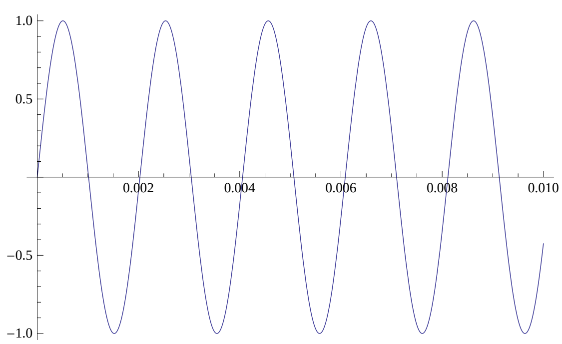
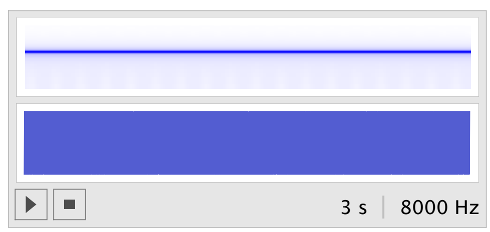


Figura 1.9: MT=C4, ASM=C5, FB=C4

```
C4

523.251

 (523*2 Pi)^2

1094116 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (523*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```



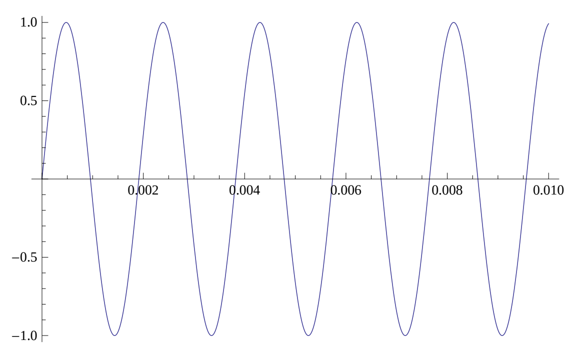
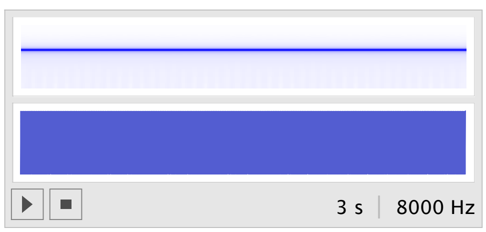


Figura 1.10: MT=D4, ASM=D5, FB=D4

```
D4

587.33

(587*2 Pi)^2

1378276 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (587*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```



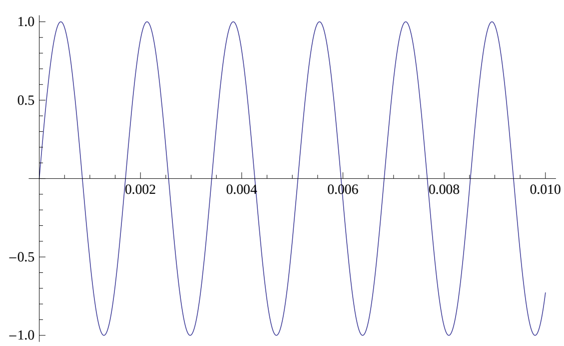
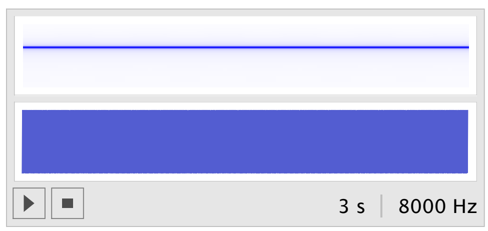


Figura 1.11: MT=E4, ASM=E5, FB=E4

```
E4

659.255

(659*2 Pi)^2

1737124 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (659*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```



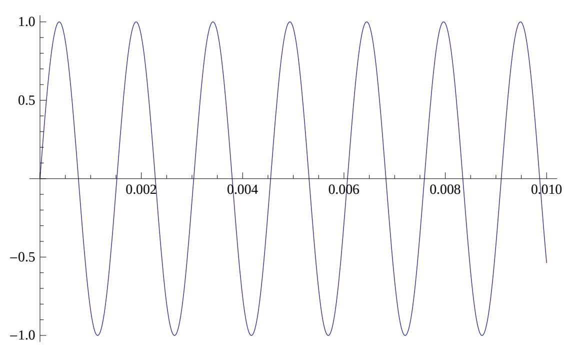


Figura 1.12: MT=F4, ASM=F5, FB=F4

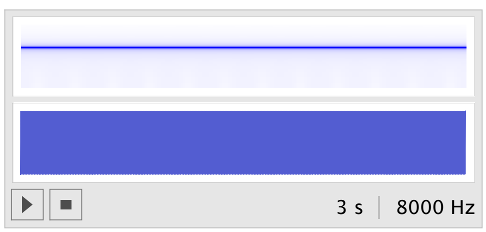
```
F4
```

```
698.456
```

```
(698*2 Pi)^2
```

```
1948816 \[Pi]^2
```

```
Play[F[t, 0, 1,  (698*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```



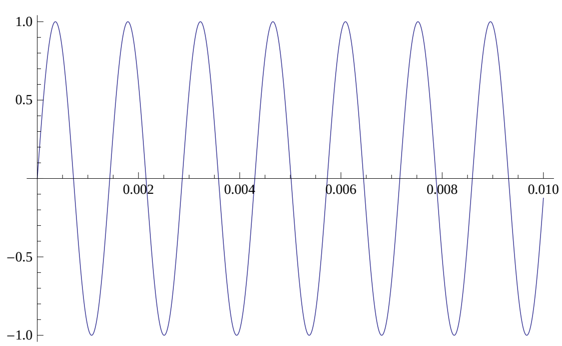
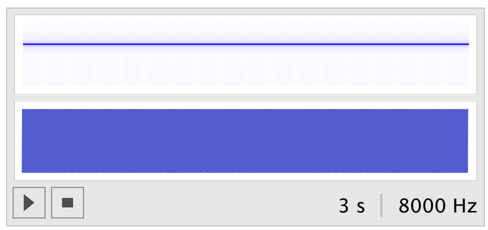
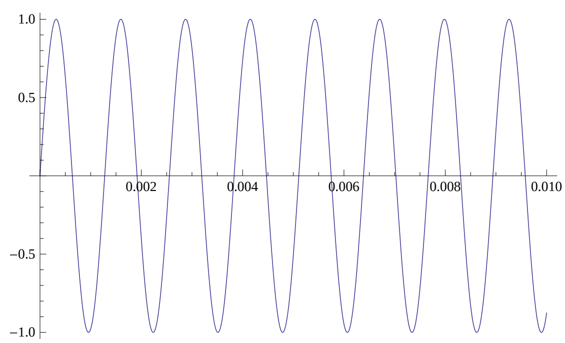


Figura 1.13: MT=G4, ASM=G5, FB=G4

```
G4

783.991

(783*2 Pi)^2

2452356 \[Pi]^2
```

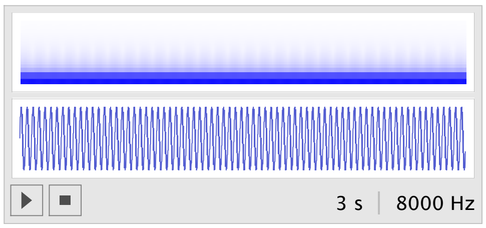




1.4.3 Observació. En la notació alemanya, B es refereix al si bemoll, però el *Mathematica* es refereix al si natural.

Ens apartats anteriors hem vist que l'oïda humana percep sons a partir 20 *Hz*. Podem comprovar amb el *Mathematica* que, efectivament, escoltem subtilment alguna cosa sobre els 20 *Hz*.

```
Play[F[t, 0, 1,  (25*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```



1.5 Interpretació matemàtica dels acords

Un cop estudiades les ones sonores per als sons purs, és interessant que estudiem ara els sons més complexos, per exemple, els acords.Usarem el nostre programa per fer algunes proves.

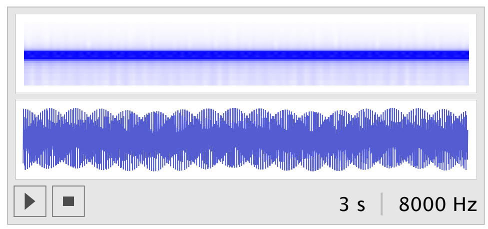
Observem que sumant les funcions sinusoïdals per a cada nota (pura) de l'acord, obtenim l'acord desitjat. Vegem-ho! Escoltem amb el *Mathematica* els acords tríades majors (usant les funcions sinusoïdals que hem trobat a l'apartat anterior per a cada nota de l'escala musical).

1.5.1 Observació. Recordem també que un acord tríada té 2 tons a la primera tercera i 1 to i mig a la segona (caldrà usar doncs sostinguts $\sharp$ i bemolls $\flat$, que en el *Mathematica* es noten en anglès: *sharp, flat*, respectivament).

1.5.2 Observació. Arribats a aquest punt, he pogut observar que si insereixo directament el nom de la nota al *Mathematica*, el programa l'associa per defecte amb la seva freqüència. Així, no cal escriure la freqüència, inserint el nom de la nota ja podem treballar.

Figura 1.14: MT=C3,E3,G3 ASM=C4,E4,G4 FB=C3,E3,G3

```
Do mi sol

Play[Sin[C3 2Pit]+Sin[E3 2Pit]+Sin[G3 2Pit], {t, 0, 3}]
```



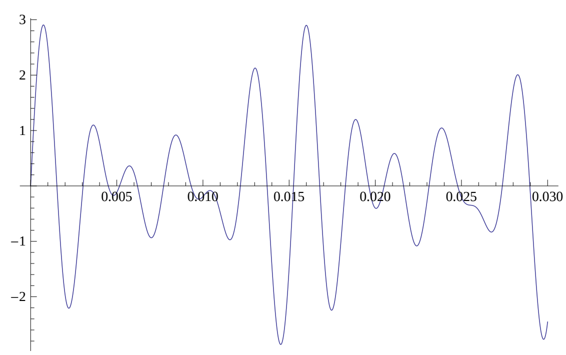
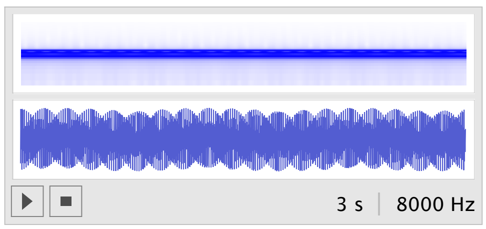


Figura 1.15: MT=D3,F♯3,G3 ASM=D4,F♯4,G4 FB=D3,F♯3,G3

```
Re fa # la

Play[Sin[D3 2 Pi t]+Sin[Fsharp3 2 Pi t]+Sin[A4 2 Pi t], {t, 0,3}]
```



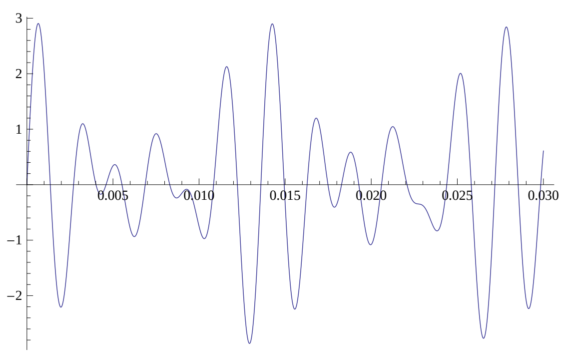
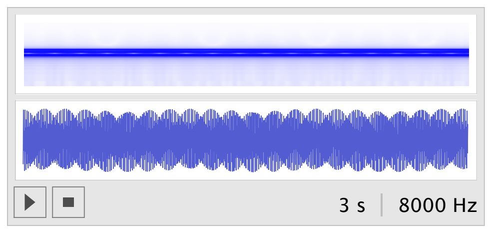


Figura 1.16: MT=E3,G♯3,B4 ASM=E4,G♯4,B4 FB=E3,G♯3,B3

```
Mi sol # si

Play[Sin[E3 2 Pi t]+Sin[Gsharp3 2 Pi t]+Sin[B4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```



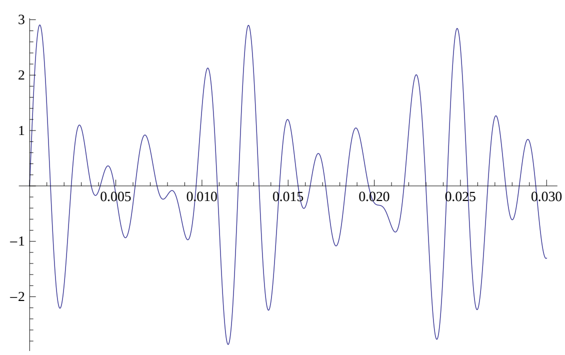
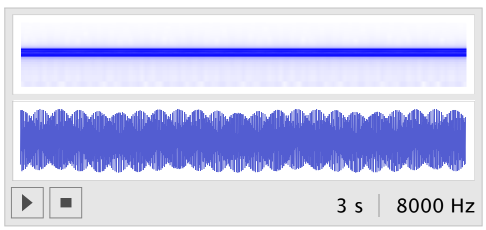


Figura 1.17: MT=F3,A4,C4 ASM=F4,A4,C5 FB=F3,A4,C4

Fa la do

```
Play[Sin[F3 2 Pi t]+Sin[A4 2 Pi t]+Sin[C4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```



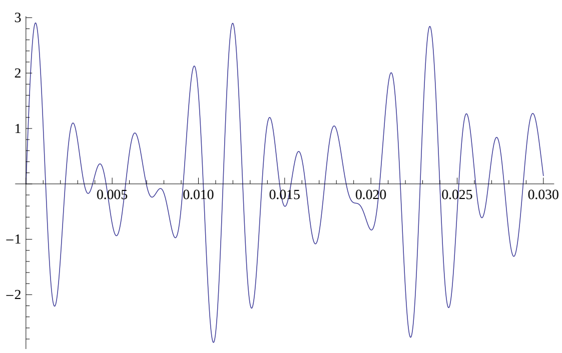
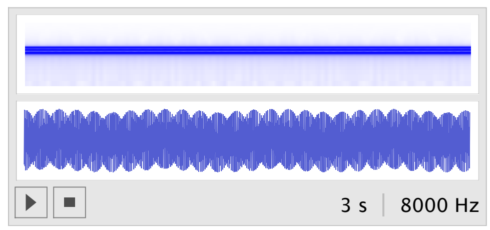


Figura 1.18: MT=G3,B4,D4 ASM=G4,B4,D5 FB=G3,B3,D4

```
Sol si re

Play[Sin[G3 2 Pi t]+Sin[B4 2 Pi t]+Sin[D4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```



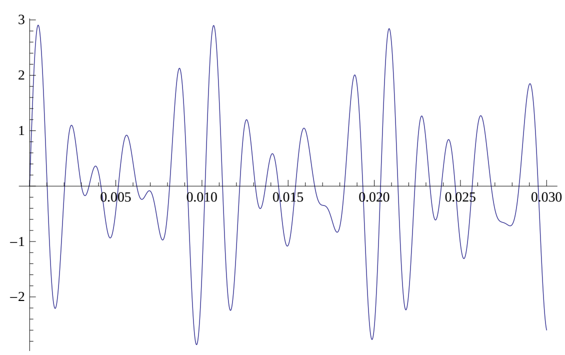
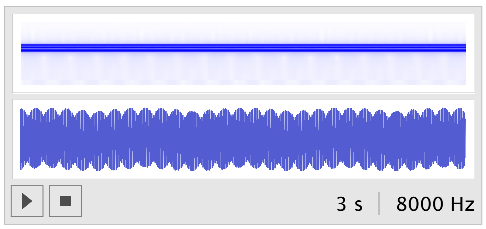


Figura 1.19: MT=A4,C♯4,E4 ASM=A4,D♯5,E5 FB=A3,C♯4,E4

```
La do # mi

Play[Sin[A4 2 Pi t]+Sin[Csharp4 2 Pi t]+Sin[E4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```



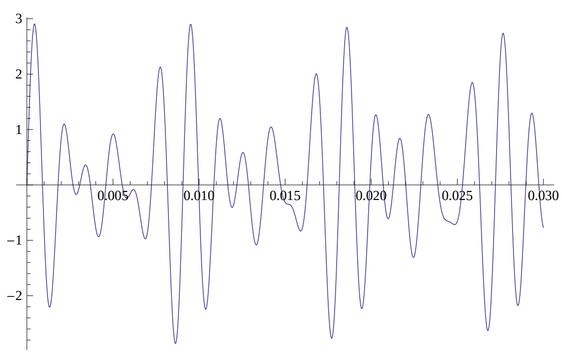
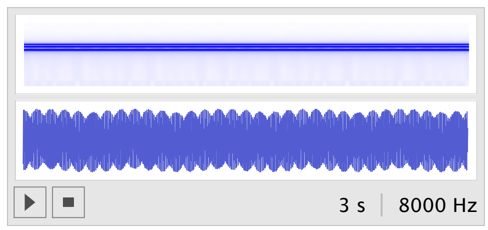
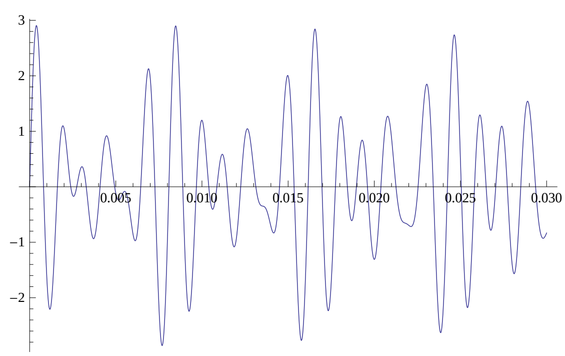


Figura 1.20: MT=B4,D♯4,F♯4 ASM=B4,D♯5,F♯4 FB=B3,D♯4,F♯4

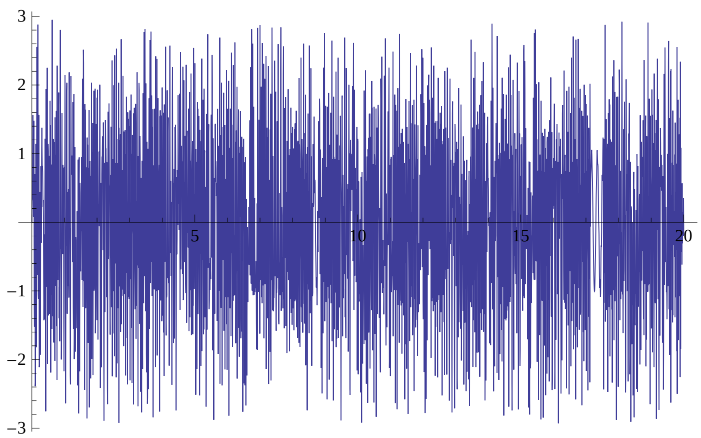
```
Si re # fa #

[Sin[B4  2 Pi t]+Sin[Dsharp4 2 Pi t]+Sin[Fsharp4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```





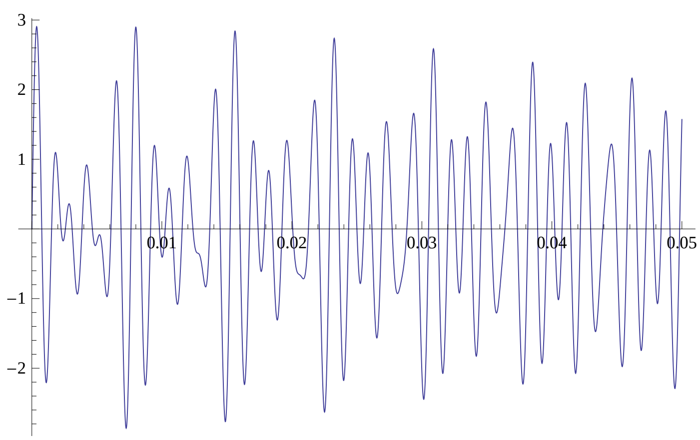
Observem, per exemple, la gràfica d'algun d'aquests acords, per exemple, el de l'acord "do-mi-sol", per una t entre 0 i 20.

```
Plot[Sin[C4* 2 Pi t]+Sin[E4* 2 Pi t]+Sin[G4 2 Pi t], {t, 0, 20}]
```



Fem "zoom"per veure com es comporta aquesta funció, és a dir, donem uns valors més petits a la nostra variable t:

```
Plot[Sin[C4* 2 Pi t]+Sin[E4* 2 Pi t]+Sin[G4 2 Pi t], {t, 0, 0.05}]
```



Intentarem estudiar la periodicitat d'aquesta funció, ja que observem que a simple vista no és fàcil de veure. Estudiem-ho amb l'acord de l'exemple anterior. Si estudiéssim la periodicitat d'una de les notes de l'acord, com per exemple, el do4 (del qual prenem una aproximació sense decimals de la seva freqüència), hauríem de cercar per a quins valors d'α:

$$\sin(523 \times 2\pi t) = \sin(523 \times 2\pi(t + \alpha))$$

En altres paraules, α correspondria al període de la nostra ona. Escrit d'una altra manera:

$$\sin(523 \times 2\pi(t + \alpha)) - \sin(523 \times 2\pi t) = 0.$$

Això se satisfà quan:

$$523 \times 2\pi(t + \alpha) - 523 \times 2\pi t = 2\pi k,$$

on k és un enter (és a dir, és un múltiple de 2π). Però:

$$523 \times 2\pi(t + \alpha) - 523 \times 2\pi t = 523 \times 2\pi\alpha.$$

Tenim que l'α més petit que satisfà la igualtat és $\alpha = \frac{1}{523}$.

Usant el mateix raonament per a la resta de notes de l'acord, tenim que, per al mi, l'α més petit és $\alpha = \frac{1}{783}$, i per el sol, $\alpha = \frac{1}{659}$. Sabem que l'acord es correspon amb la suma de les tres funcions sinusoïdals de cada nota. Per tant, el període α de l'acord haurà de ser exactament $\dfrac{1}{\mathrm{mcd}(523, 783, 659)}$. Calculem-lo amb el *Mathematica*:

```
GCD[523, 659, 783]
1
```

En aquest cas, doncs, tindrem que el període d'aquest acord és $\alpha = \frac{1}{1} = 1$. Tenim que, en termes generals: Si f_1, f_2, f_3 són les freqüències de cada una de les notes de l'acord, podem notar que:

$$f_1 = t_1 d, \quad f_2 = t_2 d, \quad f_3 = t_3 d,$$

on $d = \mathrm{mcd}(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3)$. Podem escriure:

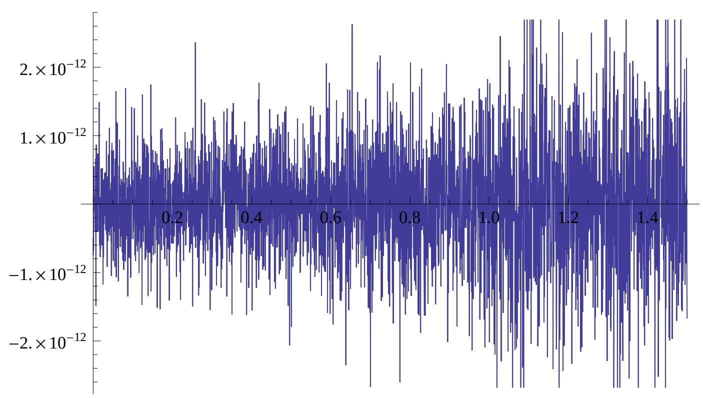
$$\frac{1}{d} = \frac{t_1}{t_1 d} = \frac{t_1}{f_1},$$

$$\frac{1}{d} = \frac{t_2}{t_2 d} = \frac{t_2}{f_2},$$
$$\frac{1}{d} = \frac{t_3}{t_3 d} = \frac{t_1}{f_3}.$$

És a dir, puc escriure $\frac{1}{d}$ en funció de les freqüències de cada una de les notes de l'acord en la relació anterior. Per tant, el període de l'acord serà forçosament $\alpha = \frac{1}{d} = \frac{1}{\mathrm{mcd}(f_1, f_2, f_3)}$.

Efectivament, si ho comprovem amb el *Mathematica*:

```
A[t_] := Sin[523 2 Pi t] + Sin[659 2 Pi t] + Sin[783 2 Pi t]

B[t_] := Sin[523 2 Pi (t + 1)] + Sin[659 2 Pi (t + 1)] +
  Sin[783 2 Pi (t + 1)]

Plot[A[t] - B[t], {t, 0, 1.5}]
```



Observem que el resultat de restar les dues funcions anteriors (on hem considerat que el període de l'acord és 1) ens dona una aproximació a 0. Per tant, el període que hem deduït és correcte.

Capítol 2

Ones i instruments

Ja hem estudiat les ones sonores per a sons purs i per a acords. El següent pas és fer un estudi de com es comporten aquestes ones en els instruments musicals.

Abans que res, ens caldrà definir el concepte d'harmònic, que és clau per entendre aquesta part.

2.0.1 Els harmònics

En termes de la física, un harmònic és qualsevol de les components sinusoïdals d'una ona periòdica que té una freqüència múltiple enter d'una freqüència fonamental. En termes més musicals, un harmònic és un so que es produeix de manera natural per la vibració de les ones sonores que acompanyen un so fonamental (també anomenat so bàsic): cada instrument, en emetre una nota (pretès so pur, que determina el so fonamental) produeix uns harmònics diferents, i això fa que el timbre de cadascun d'ells el caracteritzi.

2.0.3 Observació. Excepcionalment, es poden produir harmònics tals que les seves freqüències no són múltiples enters del so fonamental. Els denominarem *harmònics parcials fraccionaris.* Les campanes són uns dels instruments que mès harmònics d'aquest tipus emeten.

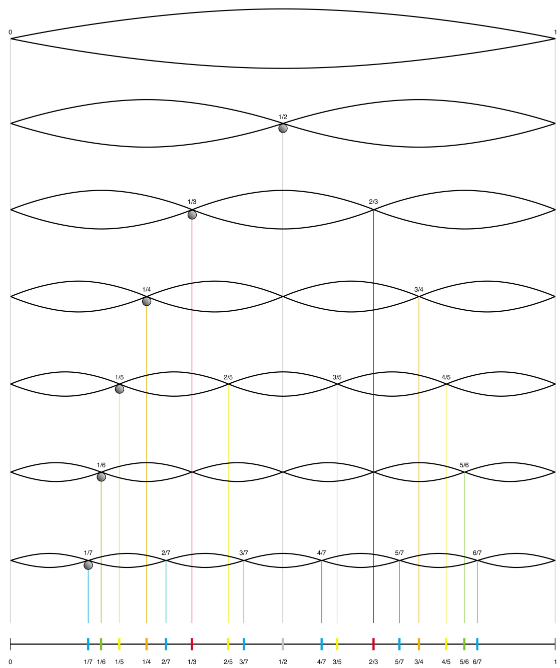


Figura 2.1: Harmònics d'una corda vibrant.

Tenim, doncs, que una ona sonora emesa per un instrument no és un so pur, sinó que ve acompanyada d'una sèrie d'harmònics, que són els que li donen el seu timbre particular.

L'oïda humana només percep un nombre finit d'harmònics (els permesos pel seu llindar diferencial); per tant, arribem a la conclusió que

> *cada nota emesa per un instrument musical es correspon amb una suma parcial d'una sèrie de Fourier. El primer terme de la sèrie és el so fonamental que determina la nota i la resta de termes són els seus harmònics.*

Cada harmònic d'una d'aquestes sèries té una amplitud (intensitat o força del so) diferent. En termes acústics, l'amplitud es correspon amb la intensitat del so. En termes matemàtics, l'amplitud es correspon amb el coeficient que acompanya el sinus. Per exemple, en els harmònics del clarinet, tenim que els imparells (el 3r, 5è, 7è...) són més forts que els altres. Cal notar que a partir del cinquè harmònic, els següents imparells sonen lleugerament desafinats (respecte al sistema d'afinació estàndar, el temperament just).

Observem la taula d'harmònics següent, prenent com a to fonamental el do1, el primer do de l'esquerra del piano:

Núm. harmònic	Freqüència	Nota	Interval
1r	66 Hz	do1	to fonamental
2n	132 Hz	do2	octava
3r	198 Hz	sol2	quinta
4t	264Hz	do3	octava
5è	330 Hz	mi3	tercera major
6è	396 Hz	sol3	quinta, una octava sobre el 3r
7è	462 Hz	si♭3	sèptima menor (molt desafinada)
8è	528 Hz	do4	octava
9è	594 Hz	re4	segona major, una quinta sobre el 6è
10è	660 Hz	mi4	tercera major, octava del 5è
11è	726 Hz	fa♯4	quarta augmentada
12è	792 Hz	sol4	quinta justa, una octava sobre el 6è
13è	858 Hz	la4	sexta major (molt desafinada)
14è	924 Hz	si♭4	sèptima menor (molt desafinada)
15è	990 Hz	si4	sèptima major, una quinta sobre el 10è
16è	1056 Hz	do5	octava

Taula 2.1: Taula d'harmònics

Un cop entès això, el que farem és intentar amb el *Mathematica* reproduir els sons de diferents instruments (o més aviat una aproximació), calculant abans com es comporten els harmònics en cada instrument.

El clarinet

El clarinet és un instrument de vent. Els instruments de vent es denominen dins de la física com a tubs sonors. Un tub sonor és aquell que conté una columna de gas, que en els instruments musicals és l'aire, que en ser excitada entra en vibració, produïnt ones sonores. En la producció d'ones no hi ha desplaçament de l'aire contingut al tub, sinó que les mol·lècules d'aquest aire xoquen amb les seves veïnes, transmetent-se així la ona sonora al llarg del tub. Aquest és el moviment ondulatori particular del clarinet que, per ser un tub sonor, és longitudinal.

Tal i com hem dit abans, el clarinet només emet harmònics imparells. Això es degut a la seva forma tubular amb un final acampanat: al tocar una nota amb l'instrument, a la part de la llengüeta s'hi produeix una pressió màxima amb l'aire. En canvi, quan l'aire surt per la campana (part de baix del clarinet), l'aire surt amb una pressió molt fluixa. Això diferencia el so del clarinet amb el del del saxo o de l'oboè, per exemple, que tenen una forma més aviat cònica al final del tub.

Un cop sabem això, intentarem imitar amb el *Mathematica* el so d'aquest instrument, sabent com es comporten els seus harmònics.

2.0.4 Observació. L'ona que obtindrem en fer aquests experiments serà lleugerament diferent a l'ona que podem captar amb un analitzador harmònic, ja que nosaltres només usarem funcions sinus per definir els harmònics, però el so és prou similar. Notem que les funcions cosinus es comporten realment com a funcions sinusoïdals desplaçades en el temps.

Prenem com a so fonamental el si♭3, que és la nota amb la què se sol afinar aquest instrument, que té una freqüència aproximada de 233 Hz.

```
f := Bflat3
```

```
f
```

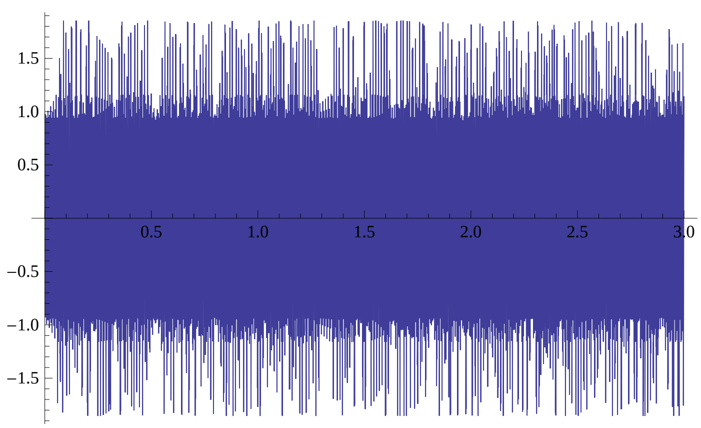
```
233.082
```

Ara, apliquem la funció *clarinet*, que és una suma de funcions sinusoïdals amb els seus coeficients (escrivint només els harmònics imparells, tal i com hem justificat anteriorment).

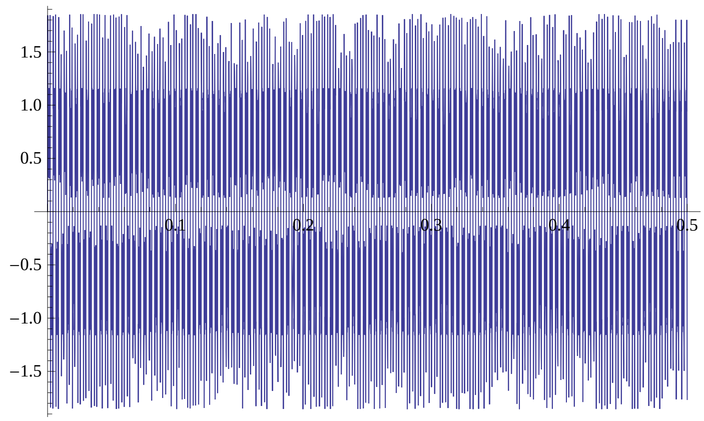
```
clarinet[t_] =
 Sin[f*2 Pi*t] + 0.75*Sin[3*f*2 Pi*t] + 0.5*Sin[5*f*2 Pi*t] +
  0.14*Sin[7*f*2 Pi*t] + 0.5*Sin[9*f*2 Pi*t] +
  0.12*Sin[11*f*2 Pi*t] + 0.17*Sin[13*f*2 Pi*t]

Sin[1464.5 t] + 0.75 Sin[4393.49 t] + 0.5 Sin[7322.48 t] +
 0.14 Sin[10251.5 t] + 0.5 Sin[13180.5 t] + 0.12 Sin[16109.5 t] +
 0.17 Sin[19038.5 t]
```

Dibuixem aquesta funció usant la comanda *Plot*. Observem el graf d'aquesta funció per a diferents intervals de t:

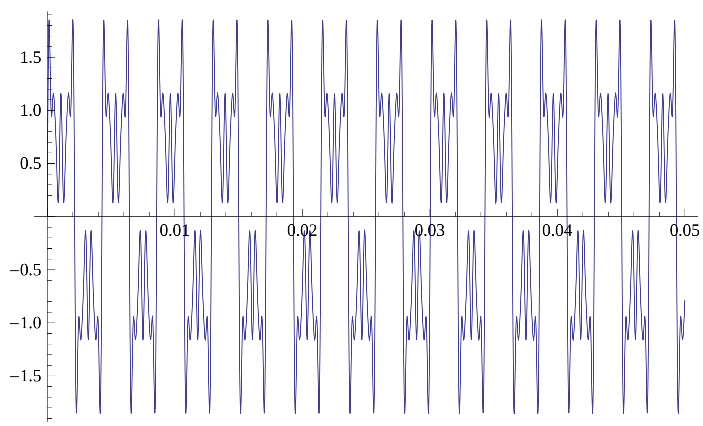
```
Plot[clarinet[t], {t, 0, 3}]
```



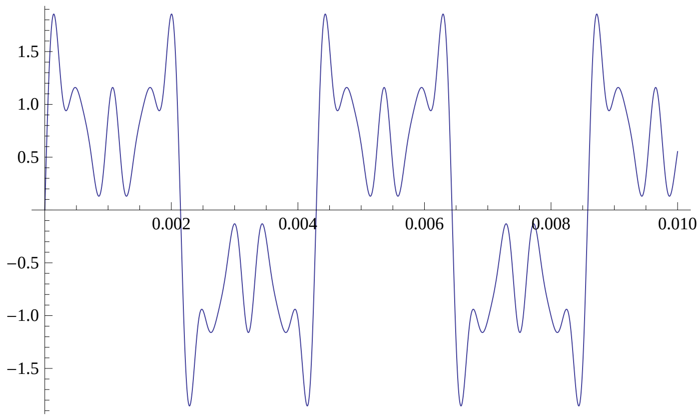

```
Plot[clarinet[t], {t, 0, 0.5}]
```




```
Plot[clarinet[t], {t, 0, 0.05}]
```

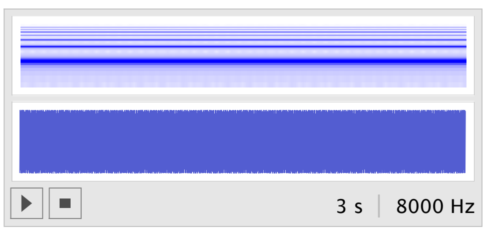



```
Plot[clarinet[t], {t, 0, 0.01}]
```



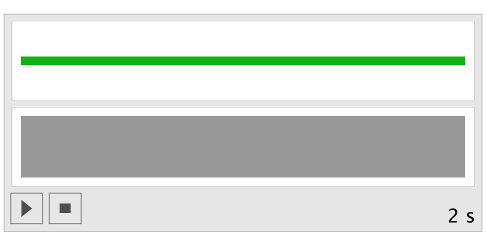
Escoltem ara aquesta funció amb el *Mathematica*, a veure què sona!

```
In[103]:= Play[clarinet[t], {t, 0, 3}]
```



Efectivament, el so obtingut és semblant al d'un clarinet. Si ho comparem amb el so que té adjudicat el *Mathematica* a aquest instrument per defecte, observem que el so és molt semblant! La comanda que ens permet reproduïr notes d'instruments és la comanda *Sound*:

```
Sound[SoundNote["Bflat3", 2, "Clarinet"]]
```

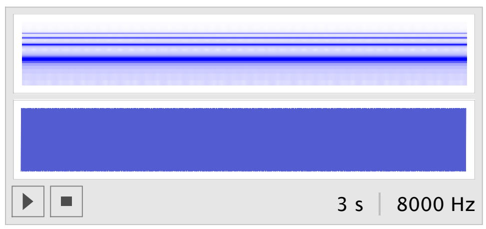


Observem que si traiem harmònics, el nostre clarinet no sona tant semblant al clarinet del *Mathematica*:

```
clarinetharm[t_] =
 Sin[f*2 Pi*t] + 0.75*Sin[3*f*2 Pi*t] + 0.5*Sin[5*f*2 Pi*t] +
  0.14*Sin[7*f*2 Pi*t]
```

```
Sin[1464.5 t] + 0.75 Sin[4393.49 t] + 0.5 Sin[7322.48 t] +
 0.14 Sin[10251.5 t]
```

```
Play[clarinetharm[t], {t, 0, 3}]
```



Si volem reproduïr alguna altra nota amb la funció que hem creat, només ens caldrà modificar el nostre so fonamental. Per exemple, fem sonar un la3 amb aquest instrument:

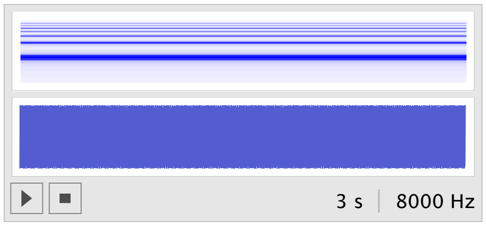
```
f2 = A3
```

```
220.
```

```
clarinet2[t_] =
 Sin[f2*2 Pi*t] + 0.75*Sin[3*f2*2 Pi*t] + 0.5*Sin[5*f2*2 Pi*t] +
  0.14*Sin[7*f2*2 Pi*t] + 0.5*Sin[9*f2*2 Pi*t] +
  0.12*Sin[11*f2*2 Pi*t] + 0.17*Sin[13*f2*2 Pi*t]
```

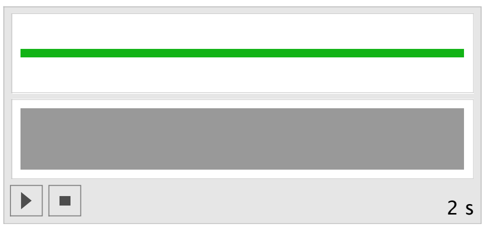
```
Sin[1382.3 t] + 0.75 Sin[4146.9 t] + 0.5 Sin[6911.5 t] +
 0.14 Sin[9676.11 t] + 0.5 Sin[12440.7 t] + 0.12 Sin[15205.3 t] +
 0.17 Sin[17969.9 t]
```

```
Play[clarinet2[t], {t, 0, 3}]
```



Comparem-lo amb el so d'aquesta nota del clarinet del *Mathematica*. Observem que és pràcticament igual!:

```
Sound[SoundNote["A3", 2, "Clarinet"]]
```



Per tant, en general, podem escriure la funció clarinet com una funció de dues variables: la nota que volem que soni (expressada com a freqüència (f) i el temps (t) que volem que duri:

$$\begin{aligned} \mathrm{clarinet}(f,t) := \quad & \sin(f2\pi t) + 0.75\sin(3f2\pi t) + 0.5\sin(5f2\pi t) + \\ & +0.14\sin(7f2\pi t) + 0.5\sin(9f2\pi t) + \\ & +0.12\sin(11f2\pi t) + 0.17\sin(13f2\pi t). \end{aligned}$$

D'aquesta manera, ja hem simulat el so d'un clarinet amb el nostre programa!. La nostra funció ens permet tocar la nota que vulguem durant el temps que vulguem.

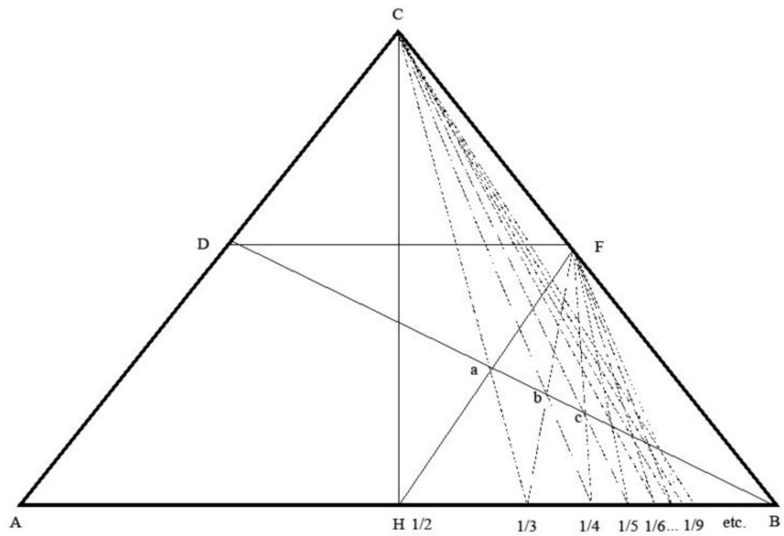
2.1 Afinació

Els sistemes d'afinació estableixen relacions de proporcionalitat entre la freqüència de les notes de l'escala. Al llarg de la història, molts d'aquests s'han anat canviant i millorant. Nosaltres ens centrarem bàsicament amb el sistema pitagòric i el sistema temperat.

2.1.1 El sistema pitagòric

Pitàgores va ser uns dels primers en relacionar la música i les matemàtiques. El seu mètode d'afinació va ser el més usat durant l'Edat Mitjana. Aquest sistema de construcció de l'escala musical es basa en l' ús de la quinta justa (musicalment parlant, és la quinta que té 3 tons i mig). També se l'anomena "'quinta perfecta de raó 3/2". Pitàgores observà que, si ens imaginem els sons com a cordes, la consonància entre els sons depenia de la llargada d'aquestes. Mitjançant la divisió geomètrica en dos, tres... parts iguals d'aquesta suposada corda, Pitàgores va establir la seva escala. Per ell, les relacions de proporcionalitat que eren més agradables per a la oïda eren 1/2 i 2/3, que corresponen, respectivament, a l'octava i la quinta de la nota principal (la nota original de la corda, sense dividir-la).

Observem aquest gràfic, que ens descriu aquest mètode, usant la teoría pitagòrica de les proporcions per dividir un segment en parts proporcionals exactes.



2.1.1 Observació. En aquest apartat, considerarem els intervals com a relacions de proporcions entre freqüències (que seràn l'invers de la proporció de la nostra corda en funció del so original de la corda)

Així doncs, si partim d'un Do, l'escala pitagòrica serà la següent:

$$\text{do} \to \text{sol} \to \text{re} \to \text{la} \to \text{mi} \to \text{si} \to \text{fa}$$

Els intervals de l'escala pitagòrica

Estudiarem ara les proporcions de les freqüències segons el sistema pitagòric. Els intervals dins de l'escala pitagòrica tenen la següent expressió:

$$\frac{(2/3)^m}{2^n}$$

on $2/3$ correspon a la proporció de la quinta i 2 a la proporció de l'octava. Les lletres n i m corresponen, respectivament, al nombre de quintes i octaves (pensant en el sistema pitagòric) de l'interval en qüestió.

Justifiquem aquesta fórmula, és a dir, fem els passos que va fer Pitàgores per tal d'obtenir l'escala ordenada, tal i com la coneixem ara. Partim doncs d'una corda vibrant (considerem que té lligats els seus extrems a una base i que, si volem, té una caixa de ressonància per a que el so tingui més intensitat) que, si la pincem, ens dona la nota do3, per exemple (podríem comemnçar amb qualsevol nota). Observem que, si premem just al mig de la corda amb un dit i amb l'altra mà la pincem, obtenim un do4, és a dir, un do d'una octava més alta. Per tant, la freqüència d'una octava ve determinada per la raó proporcional de 2.

Busquem ara la següent nota de la nostra escala: un re3. Seguim l'esquema de Pitàgores, és a dir, anem ascendint per quintes:

$$\text{do} \rightarrow \text{sol} \rightarrow \text{re} \rightarrow \text{la} \rightarrow \text{mi} \rightarrow \text{si} \rightarrow \text{fa}$$

Comptem quantes quintes i quantes octaves necessitem per arribar al re3.

2.1.2 Observació. En fer el càlcul, hem de tenir en compte que al anar pujant quintes també es van pujant octaves. Cal, per tant, multiplicar per 2 cada cop que passem a una nova octava, per tal de baixar a la octava on estigui la nostra nota fonamental (en el nostre cas, el do3).

Seguint l'esquema anterior, necessitem 2 quintes per arribar al nostre re, i cal multiplicar un cop per 2, ja que passem una octava. Per tant, la proporció del nostre re3 serà:

$$(\frac{2}{3})^2 \times 2 = \frac{8}{9}.$$

Efectivament, si passem aquesta proporció a freqüència (recordem que, per al *Mathematica*, el do3 és un do4):

```
 C4
523.251
```

```
 D4
 587.33

D4*8/9
522.071
```

Observem que si multipliquem la freqüència del do per la nostra proporció, obtenim el re! Per tant, el càlcul que hem fet és correcte.

Per tant, amb cada nota podem seguir el mateix procediment: Considerem la proporció de la quinta com $\frac{2}{3}$. Partint del do (que és la nota inicial de la nostra corda), seguim l'esquema de Pitàgores, anem comptant les quintes i les octaves que passem fins arribar a la nota que busquem (cal considerar doncs les octaves numerades, tal i com hem vist en apartats anteriors). Fem el càlcul, i obtenim la proporció cercada.

Per tant, tindrem:

mi3:

$$(\frac{2}{3})^4 \times 2^2 = \frac{64}{81}$$

fa3:

$$(\frac{2}{3})^6 \times 2^3 = \frac{512}{729}$$

sol3:

$$(\frac{2}{3})^1 \times 2^0 = \frac{2}{3}$$

la3:

$$(\frac{2}{3})^3 \times 2^1 = \frac{16}{27}$$

si3:

$$(\frac{2}{3})^5 \times 2^2 = \frac{128}{243}$$

A l'apartat següent interpretarem millor aquestes proporcions, comparant-les amb les del sistema temperat.

2.1.3 Observació. Hem obtingut unes proporcions per a cada nota de l'escala, que corresponen als intervals a partir de la nota principal; en altres paraules, la proporció ens diu en quants trossos hem de dividir la corda (i quants n'hem d'agafar) per obtenir la nostra nota. A l'apartat següent, considerarem aquest intervals com a freqüències, és a dir, prendrem justament els inversos de les proporcions anteriors, ja que dividir la corda significa augmentar la freqüència: Per exemple, si dividim la corda per la meitat ($\frac{1}{2}$), obtenim el so principal octava alta (sabem que, si el so principal té freqüència f, l'octava alta tindrà $2f$).

2.1.2 El sistema temperat

Aquest sistema d'afinació és el més usat actualment a la música occidental. El podem veure com una evolució del sistema de Pitàgoras. També el podem anomenar "'temperament igual"(en anglès, *Equal Temperament*).

Aquest sistema està basat en 12 semitons iguals (dit d'una altra manera, en 5 tons i 2 semitons), i només respecta la consonància de l'octava.

Nota	Semitò	Interval	Af. Pitagòrica	Af. temperada	Consonància
do	0	Uníson	1	1	1
do$\sharp$	1	Semitò	$\frac{2187}{2048} = 1.06787$	$\sqrt[12]{2} = 1.05946$	
re	2	2a major	$\frac{9}{8} = 1.125$	$\sqrt[12]{2^2} = 1.12246$	
mi $\flat$	3	3a menor	$\frac{32}{27} = 1.185$	$\sqrt[12]{2^3} = 1.18921$	$\frac{6}{5} = 1.2$
mi	4	3a major	$\frac{81}{64} = 1.26562$	$\sqrt[12]{2^4} = 1.25992$	$\frac{5}{4} = 1.25$
fa	5	4a justa	$\frac{4}{3} = 1.3$	$\sqrt[12]{2^5} = 1.33484$	$\frac{4}{3} = 1.3$
fa $\sharp$	6	4a augmentada	$\frac{729}{512} = 1.51923$	$\sqrt[12]{2^6} = 1.41421$	
sol	7	5a justa	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\sqrt[12]{2^7} = 1.49831$	$\frac{3}{2} = 1.5$
sol $\sharp$	8	5a augmentada	$\frac{6561}{4096} = 1.60181$	$\sqrt[12]{2^8} = 1.58740$	
la	9	6a major	$\frac{27}{16} = 1.6875$	$\sqrt[12]{2^9} = 1.68179$	$\frac{5}{3} = 1.6$
si $\flat$	10	7a menor	$\frac{16}{9} = 1.9$	$\sqrt[12]{2^10} = 1.78179$	
si	11	7a major	$\frac{243}{128} = 1.89844$	$\sqrt[12]{2^11} = 1.88775$	
do	12	8a justa	2	2	2

Taula 2.2: Comparació entre els sistemes temperat i pitagòric

La relació de freqüències corresponent a un semitò en aquest sistema és:

$$\sqrt[12]{2} = 1,059.$$

Per tant, si volem saber la relació de freqüències d'un interval, només cal comptar els semitons de l'interval i multiplicar-lo per aquest factor. En la taula anterior hem comparat el sistema temperat i el sistema pitagòric.

Capítol 3

Experimentem amb el *Mathematica*...

3.0.3 ...creant instruments

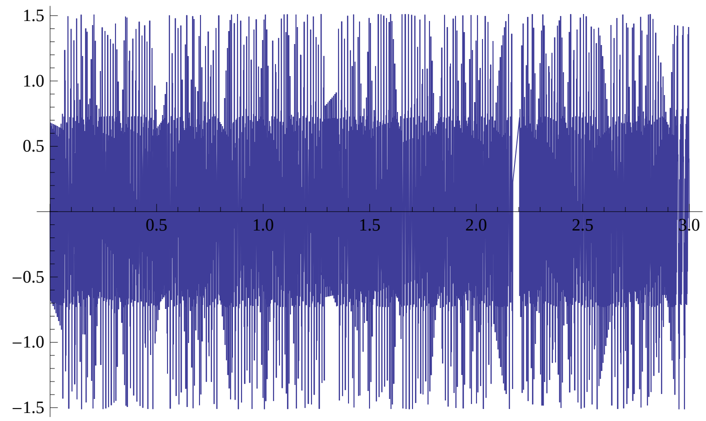
Partint de la funció trobada a l'apartat anterior per al clarinet (que recordem que simplement és una suma de funcions sinusoïdals, en altres paraules, de sons purs), hem experimentat per tal de crear nous instruments amb el nostre programa.

Primer, hem considerat un nou instrument que manté els coeficients del clarinet, però que enlloc d'agafar els harmònics imparells agafa els parells. Observem com sona aquest intrument...

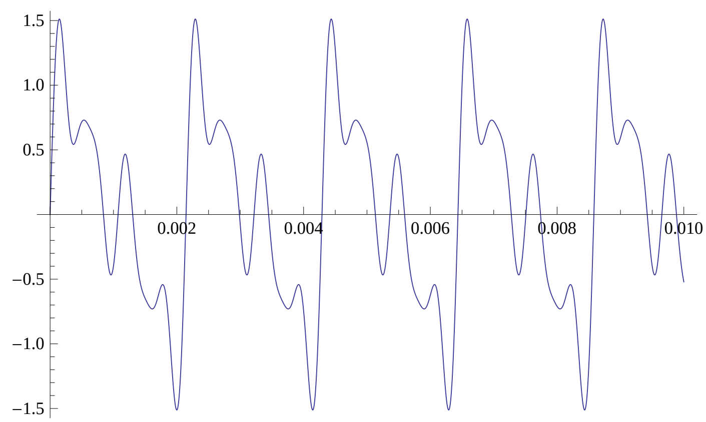
```
instrument1[f_, t_] :=
 0.75*Sin[2 Pi 2*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 4*f*t] + 0.14*Sin[2 Pi 6*f*t] +
  0.5*Sin[2 Pi 8*f*t] + 0.12*Sin[2 Pi 10*f*t] + 0.17*Sin[2 Pi 12*f*t]
```

Dibuixem-la:

```
Plot[instrument1[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```

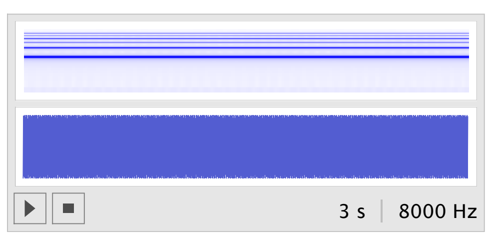



```
Plot[instrument1[Bflat3, t], {t, 0, 0.01}]
```



Fem-lo sonar, com sempre, amb la comanda *Play*:

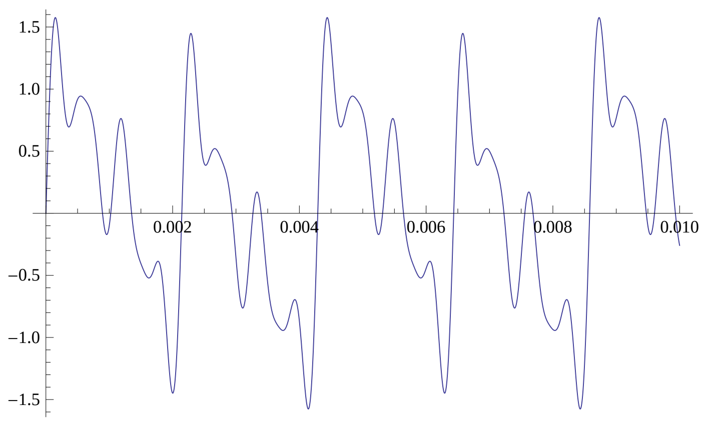
```
Play[instrument1[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```



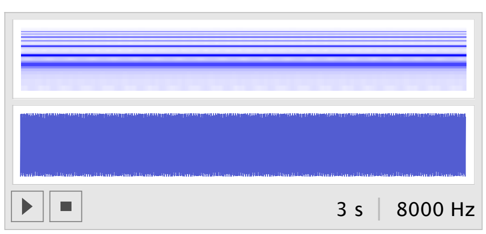
3.0.4 Observació. Observem que si, en aquest instrument, prenem com a so pur fonamental el mateix que el del clarinet($\sin(f2\pi t)$), al reproduir amb el programa una nota amb el nostre instrument, escoltem clarament dos sons. En aquest cas, podem afirmar que els harmònics no es complementen entre ells, n'hi ha un que sobresurt, per això escoltem dos sons. Observem-ho:

```
instrument1a[f_, t_] :=
 0.3*Sin[2 Pi*f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 2*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 4*f*t] +
  0.14*Sin[2 Pi 6*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 8*f*t] +
  0.12*Sin[2 Pi 10*f*t] + 0.17*Sin[2 Pi 12*f*t]
```

```
Plot[instrument1a[Bflat3, t], {t, 0, 0.01}]
```



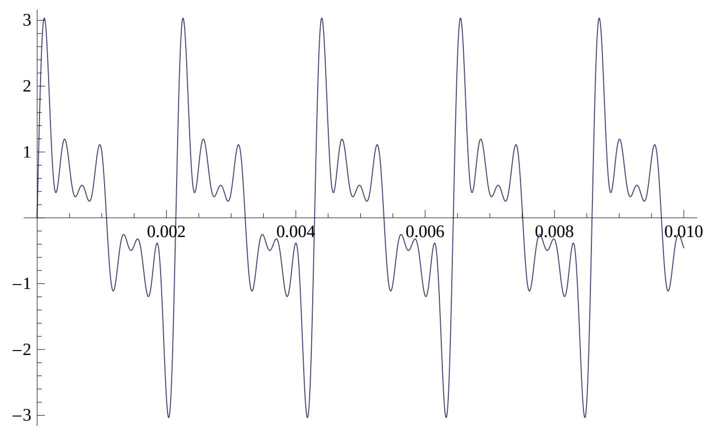

```
Play[instrument1a[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```



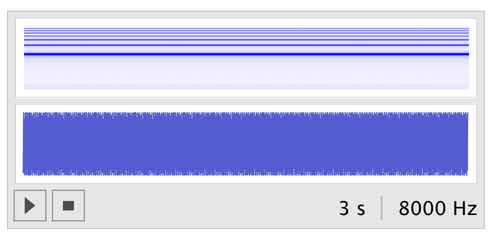
Modifiquem ara els coeficients del nostre *instrument1*, per veure què obtenim:

```
instrument2[f_, t_] :=
 Sin[ 2 Pi 2 f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 4*f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 6*f*t] +
  0.30*Sin[2 Pi 8*f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 10*f*t] +
  0.40*Sin[2 Pi 12*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 14*f*t]
```

```
Plot[instrument2[Bflat3, t], {t, 0, 0.01}]
```



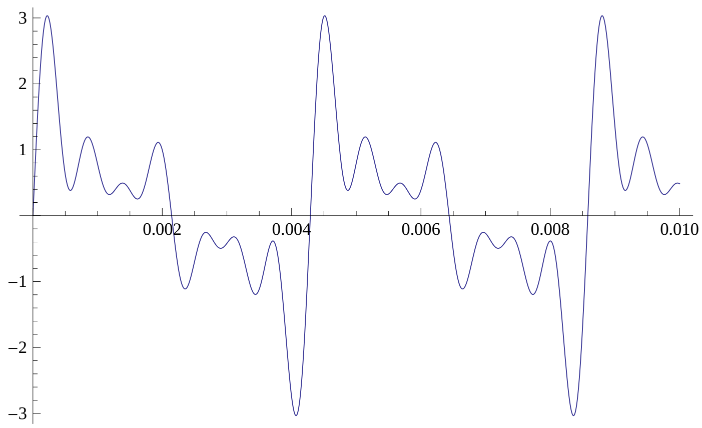

```
Play[instrument2[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```



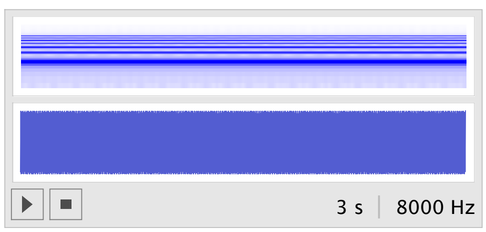
Fent proves amb diferents coeficients, hem trobat la funció d'un instrument prou semblant a l'oboè!:

```
instrument3[f_, t_] :=
 Sin[ Pi 2 f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 2*f*t] + 0.75*Sin[ 2 Pi 3*f*t] +
  0.30*Sin[ 2 Pi 4*f*t] + 0.75*Sin[ 2 Pi 5*f*t] +
  0.40*Sin[ 2 Pi 6*f*t] + 0.5*Sin[ 2 Pi 7*f*t]
```

```
Plot[instrument3[Bflat3, t], {t, 0, 0.01}]
```




```
Play[instrument3[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```



Conclusions d'aquests experiments

Després d'haver realitzat totes aquestes comprovacions, ens podem atrevir a definir d'una manera formal, en sentit matemàtic, els conceptes d'*harmònic* i *instrument*:

3.0.5 Definició. Un *harmònic* d'un so pur fonamental és qualsevol altre so pur que té per freqüència un múltiple enter de la freqüència del so fonamental.

A fi d'expressar els harmònics en forma exponencial (segons l'anàlisi complex), considerem la funció

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Partint d'aquesta definició, tenim que un so complex (és a dir, un so format per un de fonamental i els seus harmònics) és una combinació lineal de sons purs:

$$\sum a_n p_n.$$

Determinarem qui són aquestes p's, que vindran donades en funció d'una expressió sinusoidal.

En el nostre cas, prenem $z = \alpha(f) = 2\pi f$, per el que hem vist en apartats anteriors. Si afegim la variable del temps, tenim:

$$\alpha(f,t) = 2\pi f t.$$

Podem escriure:

$$q(f,t) = e^{i\alpha(f,t)} = \cos(2\pi f t) + i\sin(2\pi f t)$$

Per tant, podem expressar:

$$\sum a_n p_n = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{q^n - q^{-n}}{2i},$$

on $a_n \in \mathbb{R}$.

Ara estem en condicions de definir matemàticament què és un instrument musical.

3.0.6 Definició. Un *instrument musical* és una combinació lineal de coeficients reals de sons purs amb variables f i t. Per a cada valor de f, el so pur de freqüència més baixa, f, és el so fonamental, i els següents (diferents del fonamental) són els seus harmònics. Aquests harmònics afectats dels coeficients determinen el timbre particular de l'instrument. Les combinacions que en resulten (en variar f i t) es representen en forma d'ona sonora periòdica (sempre suposant que treballem amb instruments monofònics, és a dir, instruments que només tenen capacitat de fer sonar una nota a la vegada).

Segons el que hem vist abans, podem expressar el nostre instrument $I(f,t)$ com:

$$I(f,t) := \sum_{n\geq 1} a_n \sin(2\pi n f t) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{q^n - q^{-n}}{2i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n q^n,$$

on:

$$a_n \in \mathbb{R},$$
$$b_0 = 0,$$
$$b_n = -b_n, \text{per a tot } n \geq 1,$$
$$b_n = \frac{a_n}{2i} = -\frac{a_n i}{2},$$
$$q(f,t) = e^{i\alpha(f,t)} = e^{2\pi i f t} = \cos(2\pi f t) + i \sin(2\pi f t).$$

3.0.7 Observació. Tot i que la suma de la nostra expressió sigui infinita, cal a dir que la nostra oïda només ens permetrà escoltar els primers termes, segons la nostra freqüència audible. És a dir, hi haurà harmònics que existeixen, però que el nostre cos no sent.

3.1 ...identificant instruments

El matemàtic francès J. Fourier va considerar l'expressió de funcions com a una suma infinita de sinus i cosinus, és a dir, de la forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

per a $x \in [-\pi, \pi]$.

3.1.1 Definició. Sigui f una funció contínua a trossos en $[-\pi, \pi]$. La *sèrie de Fourier* de f és la sèrie:

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

on els coeficients a_n i b_n (anomenats *coeficients de Fourier*) estan definits com:

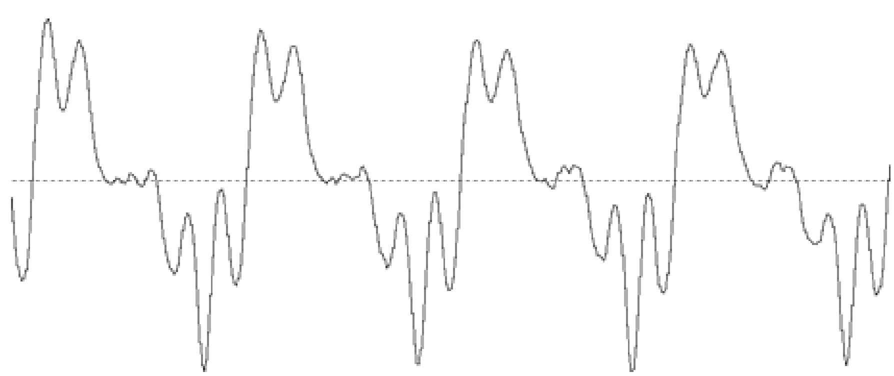
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Partint d'aquesta teoria, intentarem cercar la funció matemàtica que defineix un violí. Després de fer moltes proves, la millor manera que hem trobat és la que s'explica a l'apartat següent, que es basa en l'ús d'una funció interpoladora.

Cerca de la funció usant interpolació

Prenem una imatge de l'espectre del violí, trobada per internet. Amb l'ajut del *Mathematica*, intentarem cercar una expressió matemàtica aproximada per aquest espectre, tot comprovant després que el so d'aquesta funció és semblant al d'aquest instrument.

Partim, doncs, de la nostra imatge:



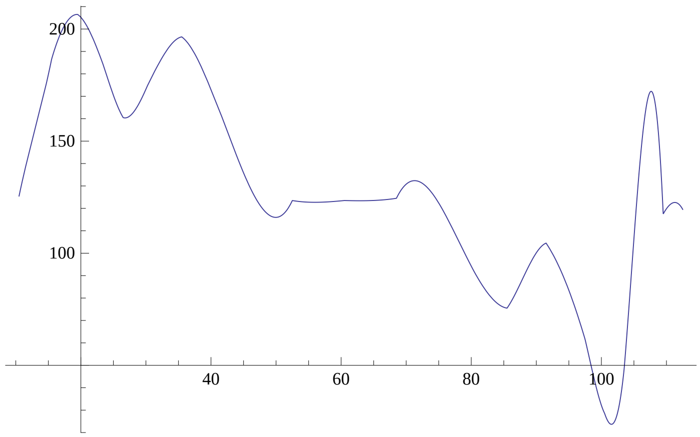
Clicant sobre de la imatge amb el botó dret del ratolí, observem que tenim la opció *Get Coordinates*. Clicant sobre els màxims i mínims locals de la funció i sobre els seus zeros, obtenim una llista de punts expressats en coordenades, que podem recuperar fent *Cntrl+C* i *Cntrl+V*. Tindrem:

```
gdiscret = {{10.5‘, 125.5‘}, {11.5‘, 138.5‘}, {13.5‘, 161.5‘}, {15.5‘,
    186.5‘}, {19.5‘, 206.5‘}, {23.5‘, 183.5‘}, {26.5‘,
   160.5‘}, {30.5‘, 176.5‘}, {35.5‘, 196.5‘}, {39.5‘, 176.5‘}, {42.5‘,
    154.5‘}, {45.5‘, 132.5‘}, {52.5‘, 123.5‘}, {60.5‘,
   123.5‘}, {68.5‘, 124.5‘}, {73.5‘, 128.5‘}, {76.5‘, 114.5‘}, {80.5‘,
    91.5‘}, {85.5‘, 75.5‘}, {91.5‘, 104.5‘}, {95.5‘, 79.5‘}, {97.5‘,
   61.5‘}, {100.5‘, 28.5‘}, {103.5‘, 48.5‘}, {104.5‘, 86.5‘}, {109.5‘,
    117.5‘}, {114.5‘, 97.5‘}, {115.5‘, 76.5‘}, {120.5‘,
   97.5‘}, {121.5‘, 112.5‘}, {122.5‘, 125.5‘}}
```

```
{{10.5, 125.5}, {11.5, 138.5}, {13.5, 161.5}, {15.5, 186.5}, {19.5,
  206.5}, {23.5, 183.5}, {26.5, 160.5}, {30.5, 176.5}, {35.5,
  196.5}, {39.5, 176.5}, {42.5, 154.5}, {45.5, 132.5}, {52.5,
  123.5}, {60.5, 123.5}, {68.5, 124.5}, {73.5, 128.5}, {76.5,
  114.5}, {80.5, 91.5}, {85.5, 75.5}, {91.5, 104.5}, {95.5,
  79.5}, {97.5, 61.5}, {100.5, 28.5}, {103.5, 48.5}, {104.5,
  86.5}, {109.5, 117.5}, {114.5, 97.5}, {115.5, 76.5}, {120.5,
  97.5}, {121.5, 112.5}, {122.5, 125.5}}
```

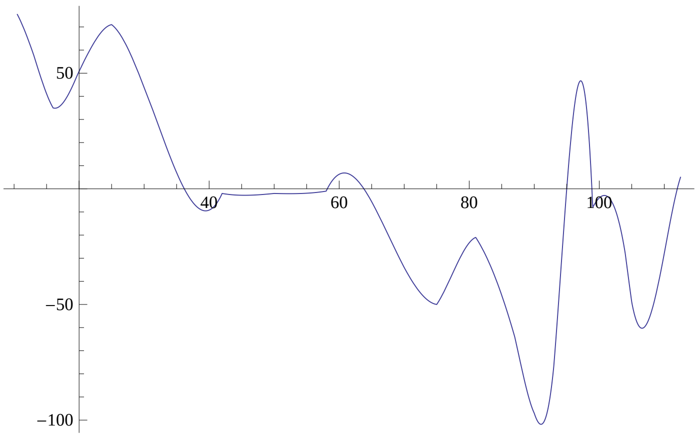
Fem una funció interpoladora a partir d’aquests punts:

```
funciog = Interpolation[gdiscret]
Plot[funciog[t], {t, 10.5, 112.5}]
```



Per a que el nostre dibuix sigui més fidel a l'original, farem una translació de manera que la intersecció dels eixos correspongui a l'origen de coordenades.

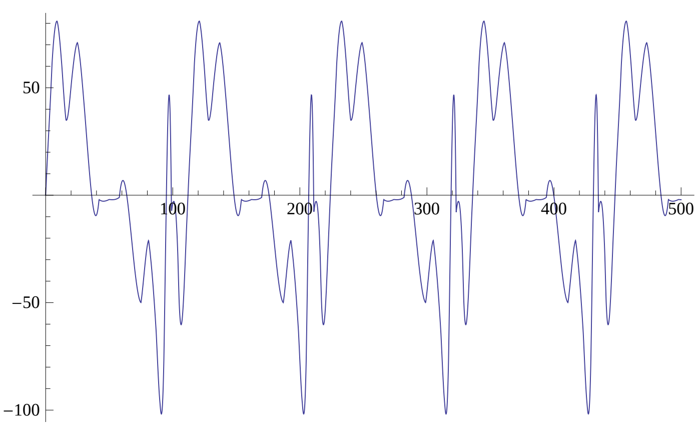
```
gdiscret2 :=
 Table[{gdiscret[[a]][[1]] - 10.5, gdiscret[[a]][[2]] - 125.5}, {a, 1,
    Length[gdiscret]}]

gdiscret2

{{0., 0.}, {1., 13.}, {3., 36.}, {5., 61.}, {9., 81.}, {13.,
  58.}, {16., 35.}, {20., 51.}, {25., 71.}, {29., 51.}, {32.,
  29.}, {35., 7.}, {42., -2.}, {50., -2.}, {58., -1.}, {63.,
  3.}, {66., -11.}, {70., -34.}, {75., -50.}, {81., -21.}, {85., \
-46.}, {87., -64.}, {90., -97.}, {93., -77.}, {94., -39.}, {99., \
-8.}, {104., -28.}, {105., -49.}, {110., -28.}, {111., -13.}, {112.,
  0.}}

funciog2 := Interpolation[gdiscret2]

Plot[funciog2[t], {t, 10.5, 112.5}]
```



Observant els dibuixos, concloem que la nostra funció té periodicitat 112. A fi que estigui definida per a qualsevol nombre real, podem considerar:

```
funciog3[t_] := funciog2[Mod[t, 112]]
```

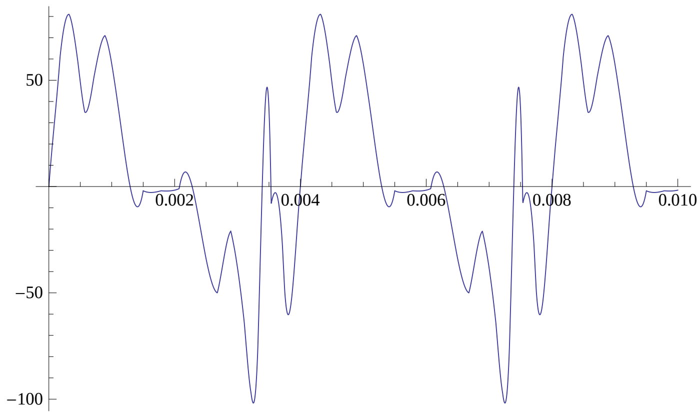
```
Plot[funciog3[t], {t, 0, 500}]
```



Definim una nova funció, fent el canvi de variable corresponent, per tal d'obtenir una periodicitat en el rang de les freqüències audibles (prenem com a model el clarinet).

```
funciog4[t_] := funciog3[t*112/0.004]
```

```
Plot[funcio4[t], {t, 0, 0.01}]
```

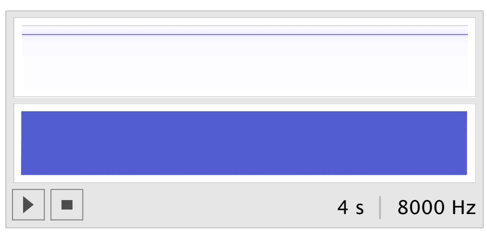


Escrivim la mateixa expressió en funció de dues variables:

```
funciofinal[f_, t_] := funciog4[f*t]
```

Escoltem-ho amb el programa:

```
Play[funciofinal[440, t], {t, 0, 4}]
```



Tot i tractar-se d'una aproximaciò, el resultat és acceptable!

3.2 ...interpretant partitures

Tot seguit, interpretarem (amb el so de l'instrument que el *Mathematica* té per defecte) una partitura amb el nostre programa. Concretament, la part més coneguda de *El Brindis* de la òpera *La Traviata* de G.Verdi:

Primer de tot, el que hem fet és fer una funció per a cada una de les notes que necessitem:

```
do3[t_] := Sin[2 Pi t C3]
fa3[t_] := Sin[2 Pi t F3]
fasharp3[t_] := Sin[2 Pi t Fsharp3]
sol3[t_] := Sin[2 Pi t G3]
solsharp3[t_] := Sin[2 Pi t Gsharp3]
la4[t_] := Sin[2 Pi t A4]
siflat4[t_] := Sin[2 Pi t Bflat4]
do4[t_] := Sin[2 Pi t C4]
```

Fem també una funció que ens simuli un silenci, per tal de poder interpretar dos cops la mateixa nota (el *Mathematica*, al posar-li dos notes seguides dins la comanda *Play*, no separa les dues notes, cal ajustar una mica el temps per poder diferenciar els dos sons i que no soni com una nota llarga).

```
silenci[t_] := Sin[2 Pi t *0]
```

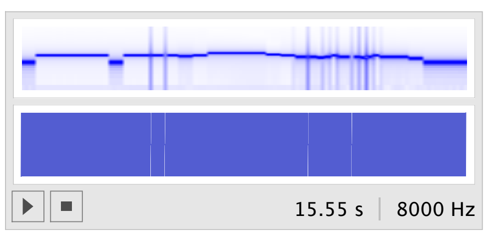
3.2.1 Observació. Observem que el silenci és el so de freqüència zero.

Per tal d'interpretar el ritme, he implementat una nova variable k. Partint de la base de què el nostre programa considera una negra per segon (és a dir, 60 negres per minut), al dividir per k, dividim aquesta negra en tantes parts com vulguem (és a dir, interpretarà un ritme més curt en aquesta nota). Per tant, quant més gran sigui aquesta k, més ràpid anirem. Provem primer amb:

```
k = 2
```

Usant la comanda *Show*, podem interpretar una nota darrere de l'altra, i obtenim:

```
Show[{Play[do3[t], {t, 0, 1/k}], Play[ la4[t], {t, 0, 5/k}],
  Play[do3[t], {t, 0, 1/k}], Play[ la4[t], {t, 0, 2/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}], Play[ la4[t], {t, 0, 0.90/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],  Play[ la4[t], {t, 0, 0.90/k}],
  Play[solsharp3[t], {t, 0, 1/k}], Play[ la4[t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ do4[t], {t, 0, 4/k}], Play[ siflat4[t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ la4[t], {t, 0, 1/k}], Play[ sol3[t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, (0.90/2)/k}],
  Play[ fasharp3[t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, (1/2)/k}], Play[ la4[t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, 1/k}], Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, (0.90/2)/k}],
  Play[ fasharp3[t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, (1/2)/k}], Play[ la4[t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, 2/k}], Play[ fa3[t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ do3[t], {t, 0, 3/k}]}]
```



Després d'escoltar-ho, ens n'adonem que potser és una mica lent, cal augmentar la k per ser més fidels a l'obra original.

Considerant el clarinet que hem trobat anteriorment, interpretem la nostra partitura amb aquest instrument! (observem que en els sons aguts, el so del nostre clarinet és menys precís).

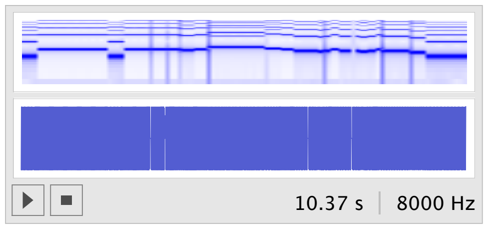
Tenim doncs:

```
clarinet[f_, t_] :=
 Sin[2 Pi f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 3*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 5*f*t] +
  0.14*Sin[2 Pi 7*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 9*f*t] +
  0.12*Sin[2 Pi 11*f*t] + 0.17*Sin[2 Pi 13*f*t]
```

Tal i com hem observat abans, interpretem la nostra partitura una mica més ràpid (concretament, per $k = 3$, que és el fidel a la partitura que hem escrit abans):

```
 k = 3

 3

Show[{Play[clarinet[C3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 5/k}],
  Play[clarinet[C3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 2/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 0.90/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 0.90/k}],
  Play[clarinet[Gsharp3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[C4, t], {t, 0, 4/k}],
  Play[ clarinet[Bflat4, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, (0.90/2)/k}],
  Play[ clarinet[Fsharp3, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[clarinet[A4, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, 1/k}],
```

```
Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, (0.90/2)/k}],
Play[ clarinet[Fsharp3, t], {t, 0, (1/2)/k}],
Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, (1/2)/k}],
Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, (1/2)/k}],
Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, 2/k}],
Play[ clarinet[F3, t], {t, 0, 1/k}],
Play[ clarinet[C3, t], {t, 0, 3/k}]}]
```



Capítol 4

Annexos

4.1 Diccionari de sinònims

Durant l'elaboració d'aquest treball, ens hem trobat amb moltes fonts d'infomació estrangeres, sobretot angleses. He elaborat un diccionari de sinònims anglès català-castellà per a les diferents paraules que ens hem trobat, per veure l'equivalent en els tres idiomes (sempre en el context del nostre treball).

Anglès	**Català**	**Castellà**
damping	amortiment	amortiguación
eadrum	timpà	tímpano
hammer	martell	martillo
loudness	intensitat	intensidad
motion	moviment	movimiento
noticeable difference limen	diferència apreciable llindar diferencial nivell de sensació	 nivel de sensación
pitch	alçada (d'una ona)	altura
plucken	puntejar pinçar	puntear pulsar
threshold of hearing	rang de percepció	umbral de audición

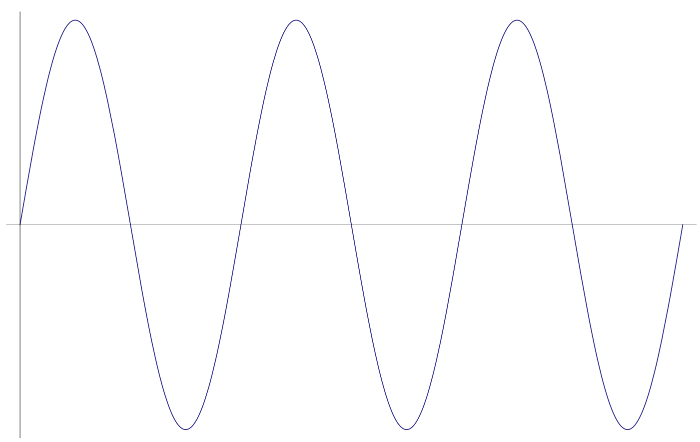
4.2 *Notebooks* amb *Mathematica*

Tot seguit, s'adjunten els *notebooks* del *Mathematica* amb els què s'ha treballat per elaborar el treball. Al CD adjuntat s'inclouen aquests documents, el qual s'aconsella consultar si es volen escoltar els resultats sonors. Abans que res, cal executar el paquet *Music* amb el programa, de la següent manera:

```
<< Music`
```

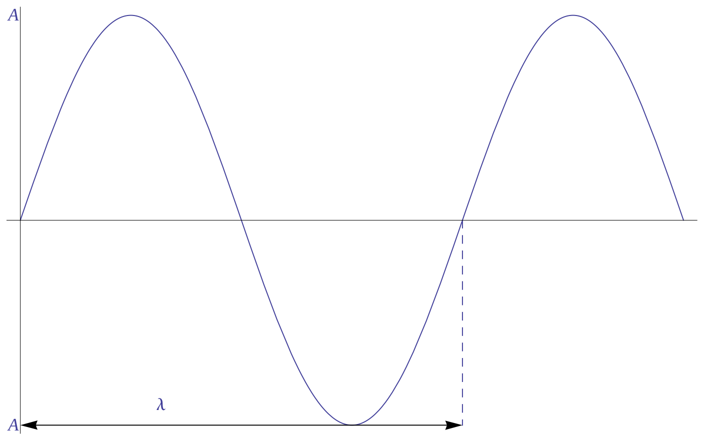
4.2.1 Observació. Com que els resultats sonors no es poden apreciar al paper, n'he inclòs un exemple de cada, però al CD hi són tots per poder-los apreciar

```
Primer contacte amb el programa

?Plot


Plot[Sin[x], {x, 0, 6 Pi}, Ticks -> None]
```



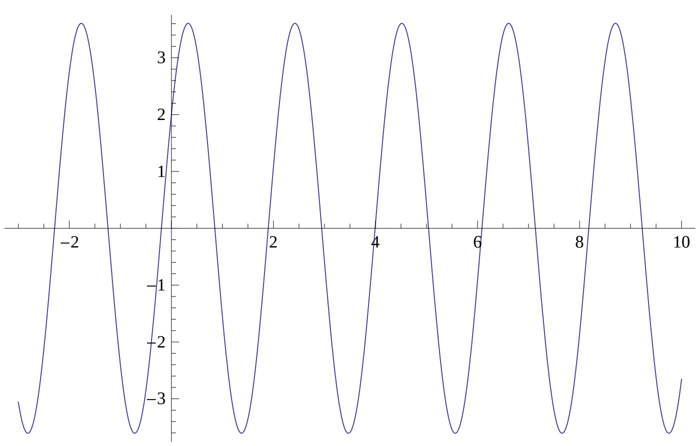
```
Show[Plot[Sin[x], {x, 0, 3 Pi}, Ticks -> None],
 Graphics[{Arrowheads[{-.025, .025}], Arrow[{{0, -1}, {2 Pi, -1}}]}],
```

```
ListLinePlot[{{2 Pi, 0}, {2 Pi, -1}}, PlotStyle -> Dashed],
Graphics[ListPlot[{x, -0.90}, PlotMarkers -> {"\[Lambda]"}]],
Graphics[ListPlot[{{-0.1, 1}, {-0.1, -1}},
  PlotMarkers -> {{"A"}, \.b4 {"-A"}}]]]
```

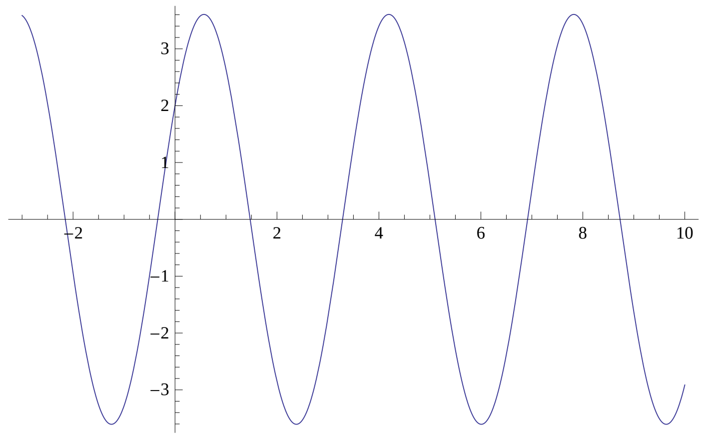



```
F[t_, A_, B_, k_] := (A Cos[Sqrt[k] t] + B Sin[Sqrt[k] t])

G[t_, A_, B_, k_] := Plot[F[t, A, B,  k], {t, -3, 10}]
```

Comprovem l' efecte agut/greu (mes a baix usem el
Play per fer - ho sonar) :
G[t, 2, 3, 9]



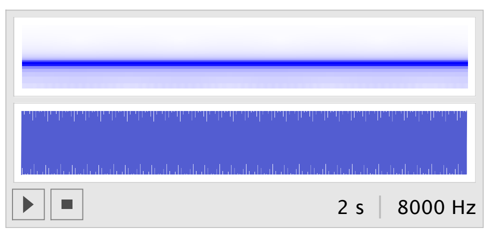
```
G[t, 2, 3, 3]
```



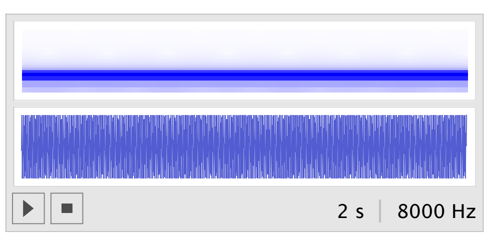

```
<< Music`
```

```
Comprovacions sonores dels gr\`{a}fics d' agut/greu.
```

```
Play[F[440 t, 2, 3,  9], {t, 0, 2}]
```

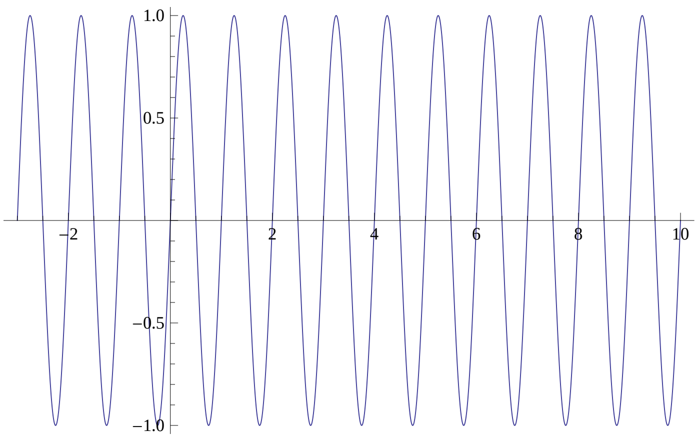



```
Play[F[440 t, 2, 3,  3], {t, 0, 2}]
```



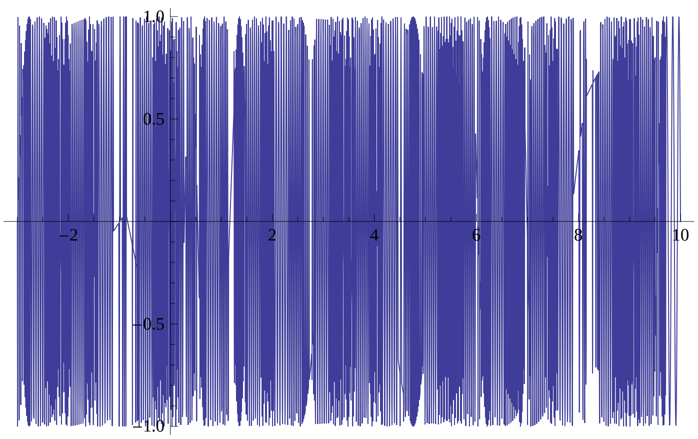
So pur :

```
Plot[Sin[2*Pi t], {t, -3, 10}]
```



Observacio:dibuix del la3

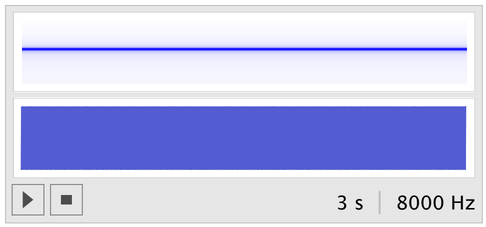
```
Plot[Sin[440*2*Pi t], {t, -3, 10}]
```



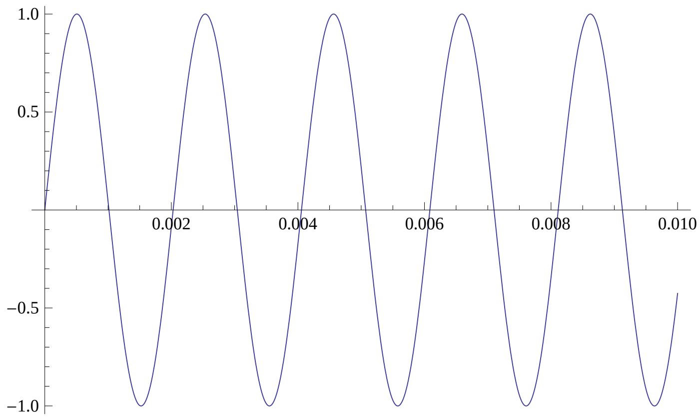
L' escala : Freq\"{u}\`{e}ncia de cada nota, kappes, so i dibuix.

A4

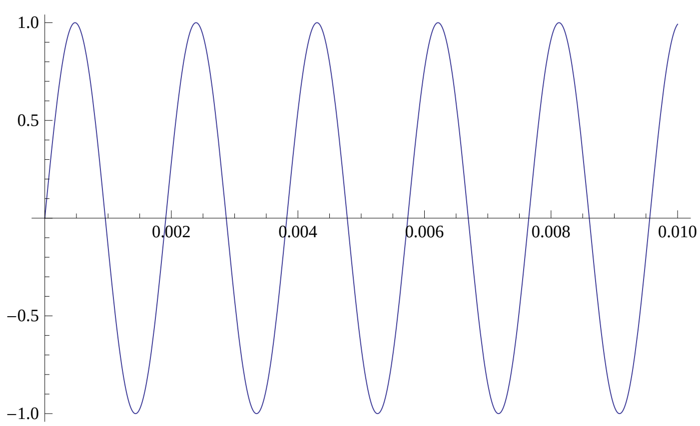
```
440.

(440*2 Pi)^2

774400 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (440*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```



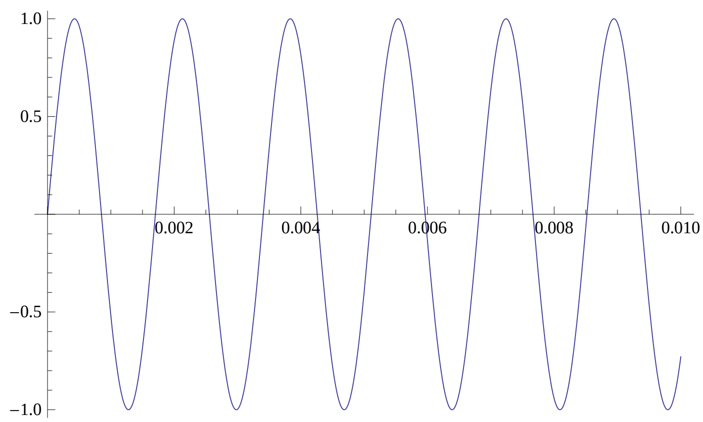

```
Plot[F[t, 0, 1,  (440*2 Pi)^2], {t, 0, 0.01}]



\begin{verbatim}
B4

493.883

(493*2 Pi)^2

972196 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (493*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]


Plot[F[t, 0, 1,  (493*2 Pi)^2], {t, 0, 0.01}]
```




```
C4

523.251

 (523*2 Pi)^2

1094116 \[Pi]^2


Play[F[t, 0, 1,  (523*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]

Plot[F[t, 0, 1,  (523*2 Pi)^2], {t, 0, 0.01}]
```

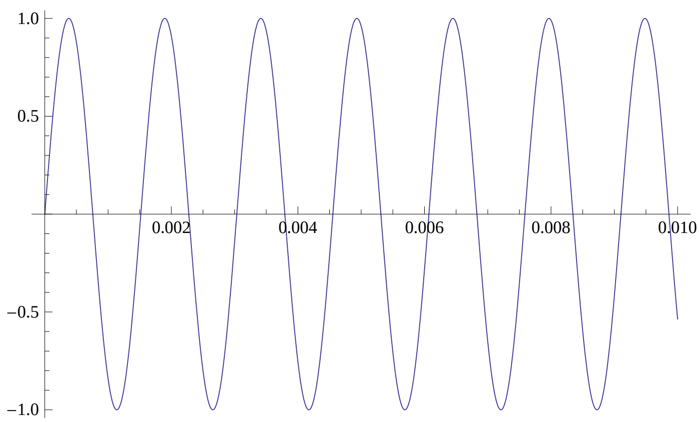


```
D4

587.33

(587*2 Pi)^2

1378276 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (587*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]

Plot[F[t, 0, 1,  (587*2 Pi)^2], {t, 0, 0.01}]
```



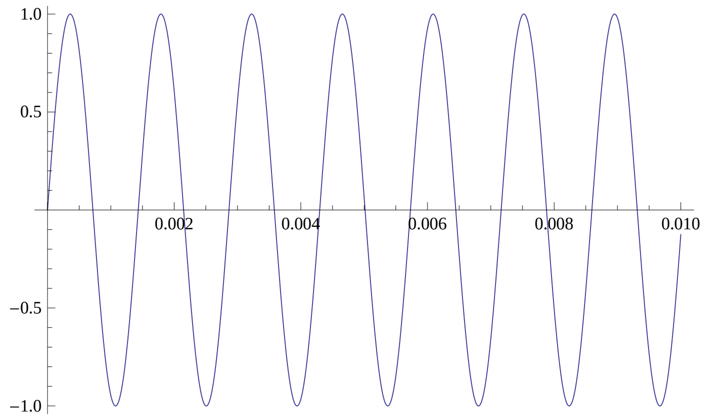

```
E4

659.255

(659*2 Pi)^2

1737124 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (659*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```

```
Plot[F[t, 0, 1,  (659*2 Pi)^2], {t, 0, 0.01}]
```

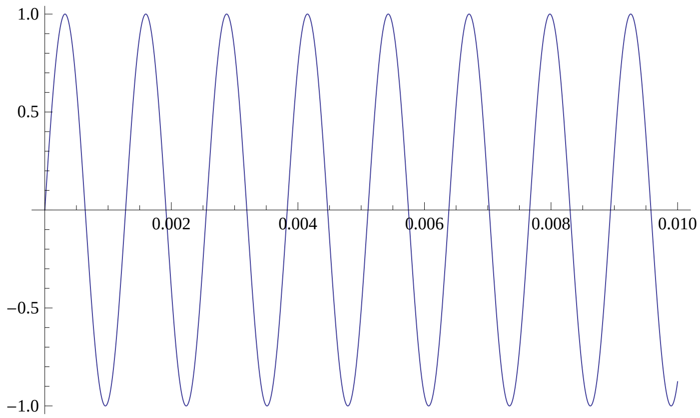



```
F4

698.456

(698*2 Pi)^2

1948816 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (698*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```

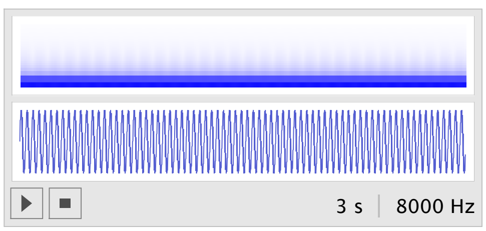
```
Plot[F[t, 0, 1,  (698*2 Pi)^2], {t, 0, 0.01}]
```




```
G4

783.991

(783*2 Pi)^2

2452356 \[Pi]^2

Play[F[t, 0, 1,  (783*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]

Plot[F[t, 0, 1,  (783*2 Pi)^2], {t, 0, 0.01}]
```




```
Llindar:

Play[F[t, 0, 1,  (25*2 Pi)^2], {t, 0, 3}]
```




```
Play[F[440 t, 2, 3,  3], {t, 0, 2}]
Play[F[440 t, 5, 10,  3], {t, 0, 2}]



Resolucio de la nostra edo:

Solve[A Cos[Sqrt[k] t] + B Sin[Sqrt[k] t] == 0, {t}]

{{t -> -(ArcCos[-(B/Sqrt[A^2 + B^2])]/Sqrt[k])}, {t ->
   ArcCos[-(B/Sqrt[A^2 + B^2])]/Sqrt[
   k]}, {t -> -(ArcCos[B/Sqrt[A^2 + B^2]]/Sqrt[k])}, {t ->
   ArcCos[B/Sqrt[A^2 + B^2]]/Sqrt[k]}}
```

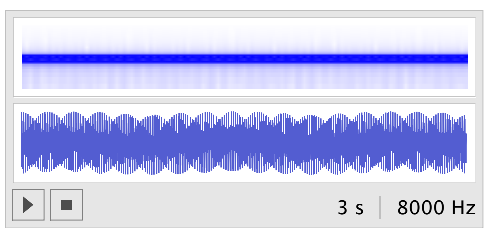
```
N[2 Pi]

6.28319

Solve[Sqrt[k] (t + p) - Sqrt[k] t - 2 Pi == 0, {p}]

{{p -> (2 \[Pi])/Sqrt[k]}}
```

Acords:

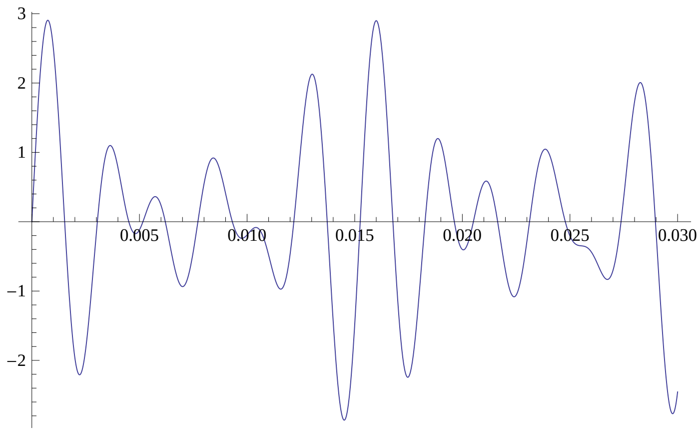
```
<< Music`
```

Do mi sol

```
Play[Sin[C3 2 Pi t] + Sin[E3 2 Pi t] + Sin[G3 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```



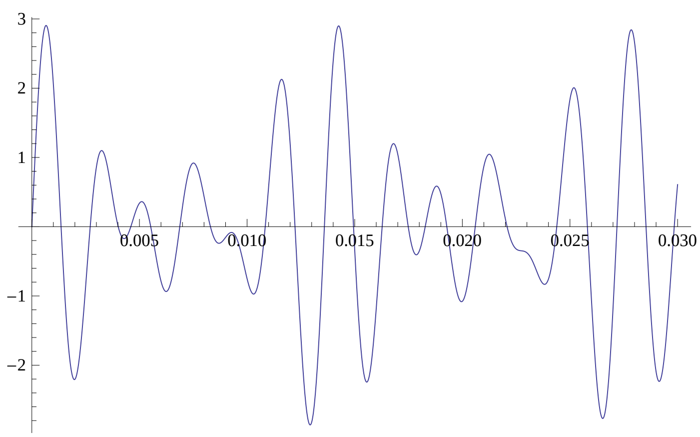

```
Plot[Sin[C3 2 Pi t] + Sin[E3 2 Pi t] + Sin[G3 2 Pi t], {t, 0, 0.03}]
```



Re fa # la

```
Play[Sin[D3 2 Pi t] + Sin[Fsharp3 2 Pi t] +
 Sin[A4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```

```
Plot[Sin[D3 2 Pi t] + Sin[Fsharp3 2 Pi t] + Sin[A4 2 Pi t], {t, 0,
  0.03}]
```

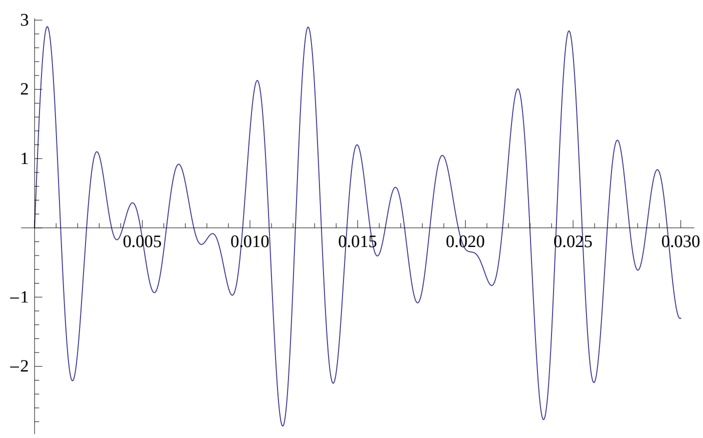


Mi sol # si

```
Play[Sin[E3 2 Pi t] + Sin[ Gsharp3 2 Pi t] +
```

```
Sin[B4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```

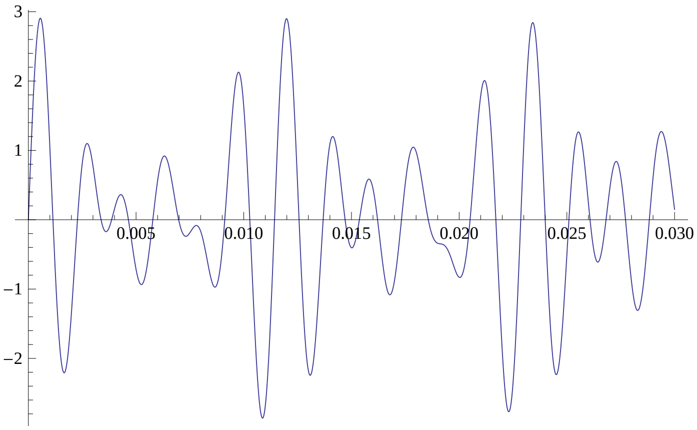
```
Plot[Sin[E3 2 Pi t] + Sin[ Gsharp3 2 Pi t] + Sin[B4 2 Pi t], {t, 0,
  0.03}]
```



Fa la do

```
Play[Sin[F3 2 Pi t] + Sin[ A4 2 Pi t] +
 Sin[C4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```

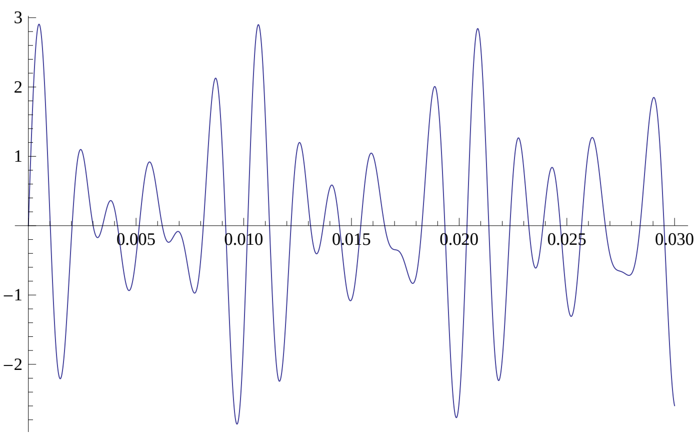
```
Plot[Sin[F3 2 Pi t] + Sin[ A4 2 Pi t] + Sin[C4 2 Pi t], {t, 0, 0.03}]
```



Sol si re

```
Play[Sin[G3 2 Pi t] + Sin[ B4 2 Pi t] +
 Sin[D4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```

```
Plot[Sin[G3 2 Pi t] + Sin[ B4 2 Pi t] + Sin[D4 2 Pi t], {t, 0, 0.03}]
```

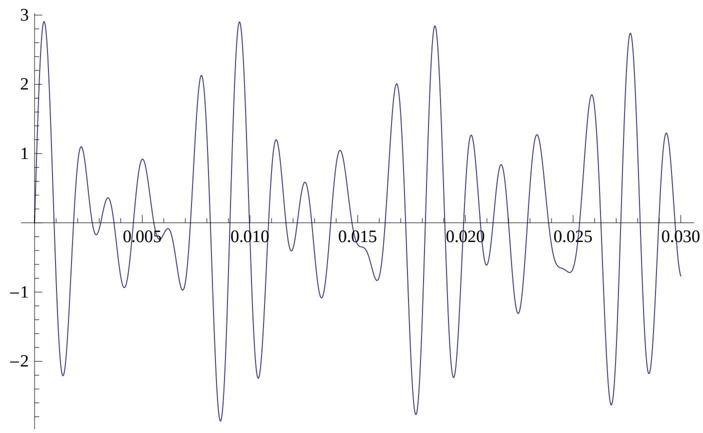


La do # mi

```
Play[Sin[A4 2 Pi t] + Sin[ Csharp4 2 Pi t] +
```

```
Sin[E4 2 Pi t], {t, 0, 3}]
```

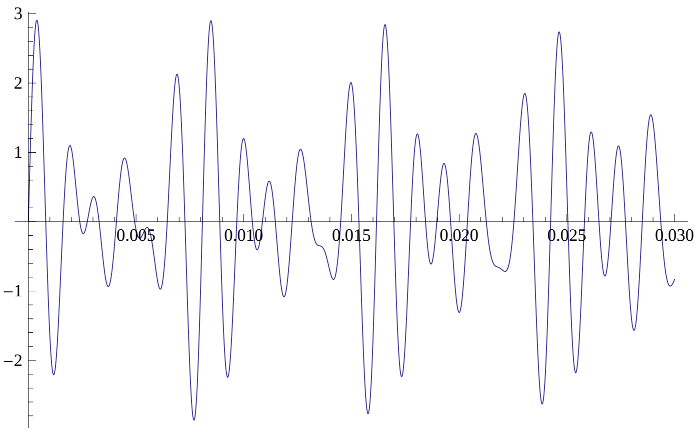
```
Plot[Sin[A4 2 Pi t] + Sin[ Csharp4 2 Pi t] + Sin[E4 2 Pi t], {t, 0,
  0.03}]
```



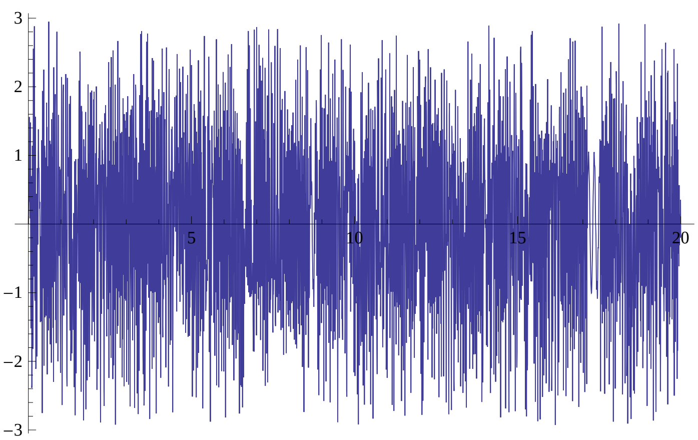
Si re # fa #

```
Play[Sin[B4 2 Pi t] + Sin[ Dsharp4*2 Pi t] +
 Sin[Fsharp4 2 Pi t], {t,
  0, 3}]
```

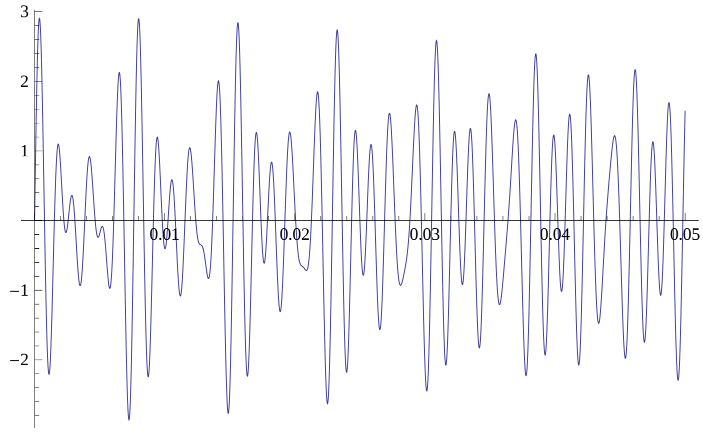
```
Plot[Sin[B4 2 Pi t] + Sin[ Dsharp4*2 Pi t] + Sin[Fsharp4 2 Pi t], {t,
  0, 0.03}]
```




```
Dibuix d' un acord :

Plot[Sin[C4* 2 Pi t] + Sin[E4* 2 Pi t] +
 Sin[G4 2 Pi t], {t, 0, 20}]
```



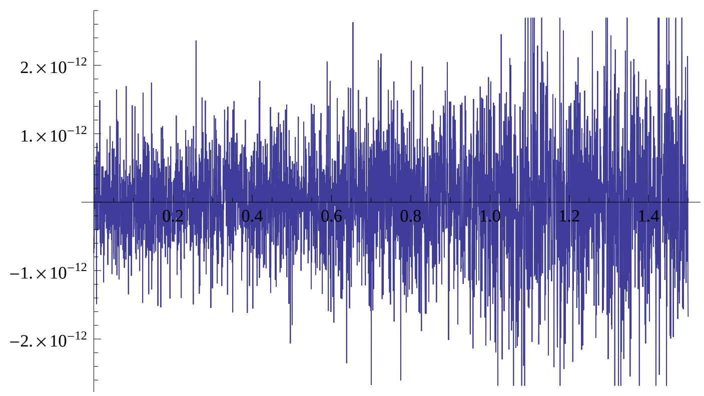

```
Fem "zoom" :

Plot[Sin[C4* 2 Pi t] + Sin[E4* 2 Pi t] +
 Sin[G4 2 Pi t], {t, 0, 0.05}]
```




```
Analisi del periode de l’ acord :

C4

523.251

E4

659.255

G4

783.991

Solve[{a/523 - b/659 == 0, b/659 - c/783 == 0,
  a/523 - c/783 == 0}, {b, c}]

{{b -> (659 a)/523, c -> (783 a)/523}}

GCD[523, 659]

1

a = 523, b = 659, c = 783
```

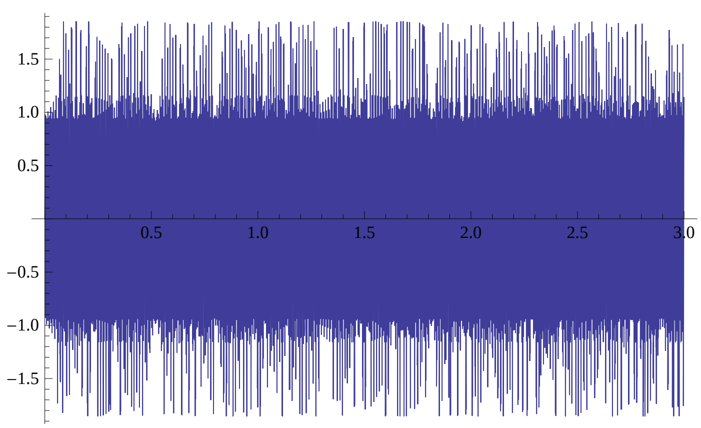
```
F[t_] := Sin[523 *2 Pi t] + Sin[659*2 Pi t] + Sin[783* 2 Pi t]

F[0.5]

3.79199*10^-13

F[0.5 + 1]

2.28102*10^-13

Sin[523 2 Pi 550.467]

0.998402

Sin[523 2 Pi 551.467]

0.998402

GCD[523, 659, 783]

1


C4

523.251

E4

659.255

G4

783.991

Sin[523 2 Pi t] + Sin[659 2 Pi t] + Sin[783 2 Pi t] /. t -> 550.467

-0.849099
```

```
Sin[523 2 Pi t] + Sin[659 2 Pi t] + Sin[783 2 Pi t] /. t -> 551.467

-0.849099

A[t_] := Sin[523 2 Pi t] + Sin[659 2 Pi t] + Sin[783 2 Pi t]

B[t_] := Sin[523 2 Pi (t + 1)] + Sin[659 2 Pi (t + 1)] +
  Sin[783 2 Pi (t + 1)]


Plot[A[t] - B[t], {t, 0, 1.5}]
```

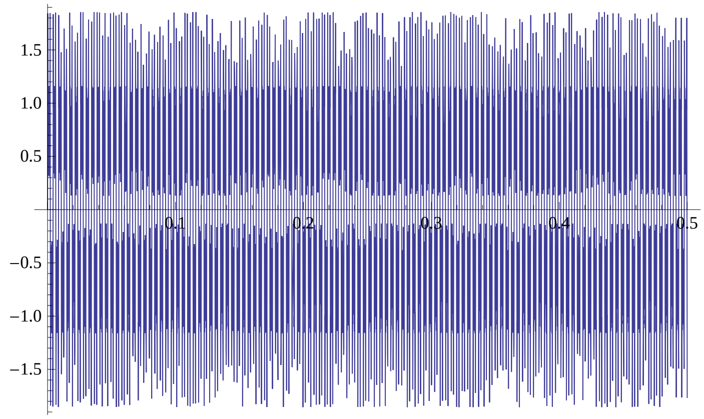



```
So del clarinet

A4

440.

f := Bflat3

f
233.082

clarinet[t_] =
 Sin[f*2 Pi*t] + 0.75*Sin[3*f*2 Pi*t] +
```

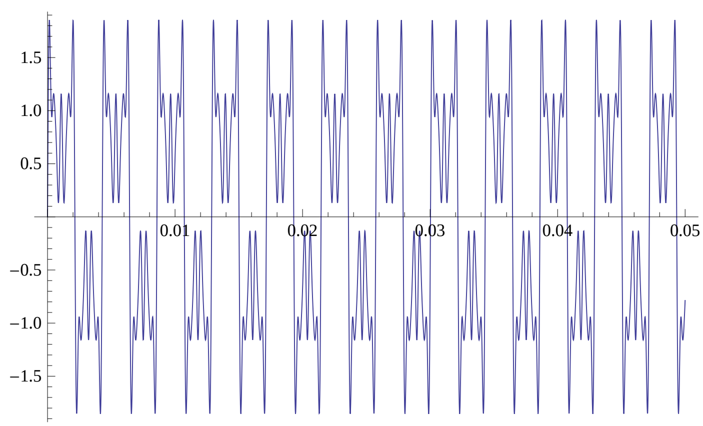
```
  0.5*Sin[5*f*2 Pi*t] +
  0.14*Sin[7*f*2 Pi*t] + 0.5*Sin[9*f*2 Pi*t] +
  0.12*Sin[11*f*2 Pi*t] + 0.17*Sin[13*f*2 Pi*t]

Sin[1464.5 t] + 0.75 Sin[4393.49 t] +
0.5 Sin[7322.48 t] + 0.14 Sin[10251.5 t] +
0.5 Sin[13180.5 t] + 0.12 Sin[16109.5 t] +
 0.17 Sin[19038.5 t]

clarinet[3]

1.13968

Plot[clarinet[t], {t, 0, 3}]
```



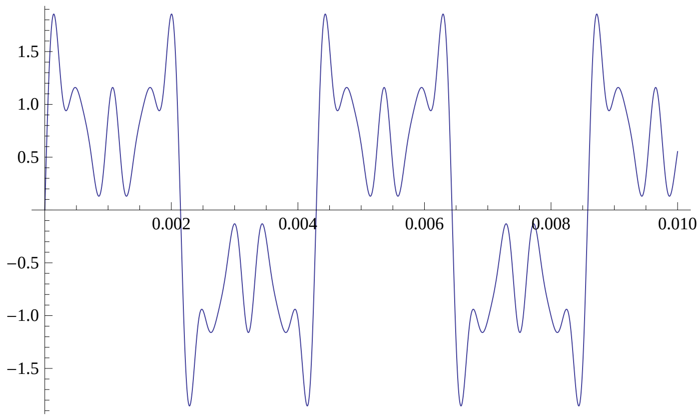

```
Plot[clarinet[t], {t, 0, 0.5}]
```



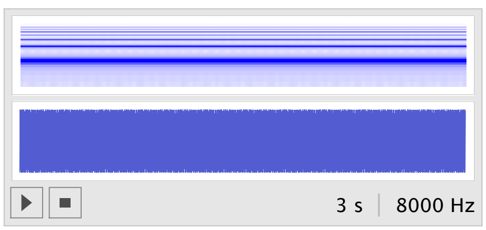

```
Plot[clarinet[t], {t, 0, 0.05}]
```



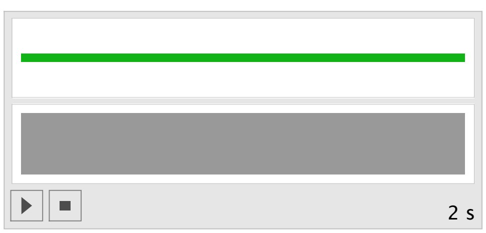

```
Plot[clarinet[t], {t, 0, 0.01}]
```




```
Play[clarinet[t], {t, 0, 3}]
```

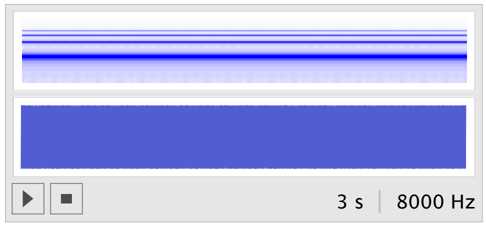



```
Sound[SoundNote["Bflat3", 2, "Clarinet"]]
```

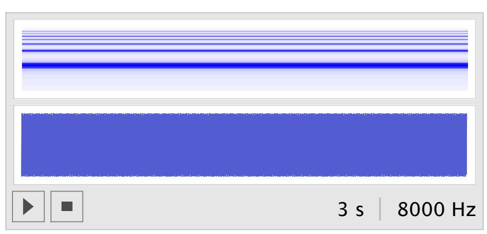



```
Traiem harmonics per veure que passa.

clarinetharm[t_] =
 Sin[f*2 Pi*t] + 0.75*Sin[3*f*2 Pi*t] + 0.5*Sin[5*f*2 Pi*t] +
  0.14*Sin[7*f*2 Pi*t]
```

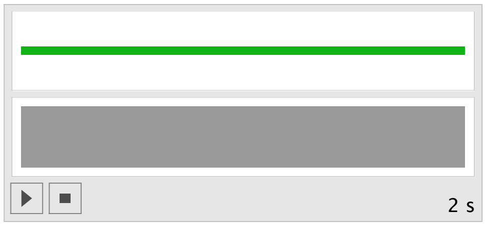
```
Sin[1464.5 t] + 0.75 Sin[4393.49 t] + 0.5 Sin[7322.48 t] +
 0.14 Sin[10251.5 t]

Play[clarinetharm[t], {t, 0, 3}]
```




```
Provem un nou clarinet:
f2 = A3

220.

clarinet2[t_] =
 Sin[f2*2 Pi*t] + 0.75*Sin[3*f2*2 Pi*t] + 0.5*Sin[5*f2*2 Pi*t] +
  0.14*Sin[7*f2*2 Pi*t] + 0.5*Sin[9*f2*2 Pi*t] +
  0.12*Sin[11*f2*2 Pi*t] + 0.17*Sin[13*f2*2 Pi*t]

Sin[1382.3 t] + 0.75 Sin[4146.9 t] + 0.5 Sin[6911.5 t] +
 0.14 Sin[9676.11 t] + 0.5 Sin[12440.7 t] + 0.12 Sin[15205.3 t] +
 0.17 Sin[17969.9 t]

Play[clarinet2[t], {t, 0, 3}]
```




```
Sound[SoundNote["A3", 2, "Clarinet"]]
```



La Traviata :

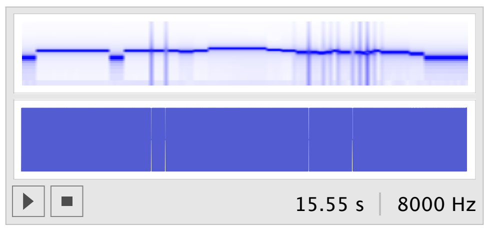
```
do3[t_] := Sin[2 Pi t C3]
fa3[t_] := Sin[2 Pi t F3]
fasharp3[t_] := Sin[2 Pi t Fsharp3]
sol3[t_] := Sin[2 Pi t G3]
solsharp3[t_] := Sin[2 Pi t Gsharp3]
la4[t_] := Sin[2 Pi t A4]
siflat4[t_] := Sin[2 Pi t Bflat4]
do4[t_] := Sin[2 Pi t C4]

silenci[t_] := Sin[2 Pi t *0]
```

Per tal de determinar la velocitat, considerem la variable k, que dividira el temps.

Quant mes augmentem la k, mes rapid sera.

```
k = 2

2

Show[{Play[do3[t], {t, 0, 1/k}], Play[ la4[t], {t, 0, 5/k}],
  Play[do3[t], {t, 0, 1/k}], Play[ la4[t], {t, 0, 2/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}], Play[ la4[t], {t, 0, 0.90/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],  Play[ la4[t], {t, 0, 0.90/k}],
  Play[solsharp3[t], {t, 0, 1/k}], Play[ la4[t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ do4[t], {t, 0, 4/k}], Play[ siflat4[t], {t, 0, 1/k}],
```

```
  Play[ la4[t], {t, 0, 1/k}], Play[ sol3[t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, (0.90/2)/k}],
  Play[ fasharp3[t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, (1/2)/k}], Play[ la4[t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, 1/k}], Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, (0.90/2)/k}],
  Play[ fasharp3[t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, (1/2)/k}], Play[ la4[t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ sol3[t], {t, 0, 2/k}], Play[ fa3[t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ do3[t], {t, 0, 3/k}]}]
```

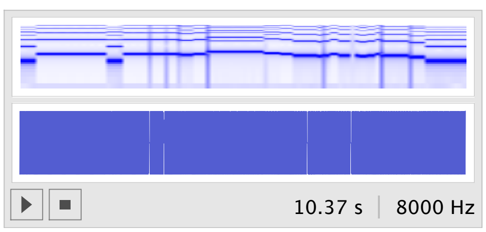



```
clarinet[f_, t_] :=
 Sin[2 Pi f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 3*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 5*f*t] +
  0.14*Sin[2 Pi 7*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 9*f*t] +
  0.12*Sin[2 Pi 11*f*t] + 0.17*Sin[2 Pi 13*f*t]
```

Toquem La Traviata amb el clarinet, una mica mes rapid que abans :

```
k = 3

3


Show[{Play[clarinet[C3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 5/k}],
  Play[clarinet[C3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 2/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 0.90/k}],
```

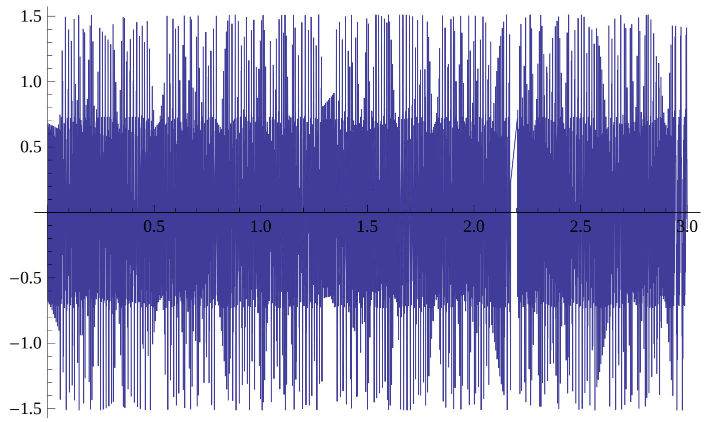
```
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 0.90/k}],
  Play[clarinet[Gsharp3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[C4, t], {t, 0, 4/k}],
  Play[ clarinet[Bflat4, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, (0.90/2)/k}],
  Play[ clarinet[Fsharp3, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[clarinet[A4, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ silenci[t], {t, 0, 0.10/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, (0.90/2)/k}],
  Play[ clarinet[Fsharp3, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ clarinet[A4, t], {t, 0, (1/2)/k}],
  Play[ clarinet[G3, t], {t, 0, 2/k}],
  Play[ clarinet[F3, t], {t, 0, 1/k}],
  Play[ clarinet[C3, t], {t, 0, 3/k}]}]
```



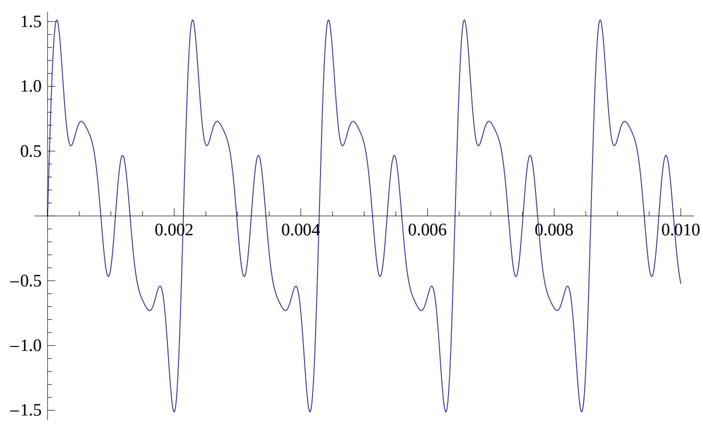

```
clarinet[f_, t_] :=
 Sin[2 Pi f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 3*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 5*f*t] +
  0.14*Sin[2 Pi 7*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 9*f*t] +
  0.12*Sin[2 Pi 11*f*t] + 0.17*Sin[2 Pi 13*f*t]
```

M' invento jo un instrument : nomes considero els harm\'{o}nics parells.

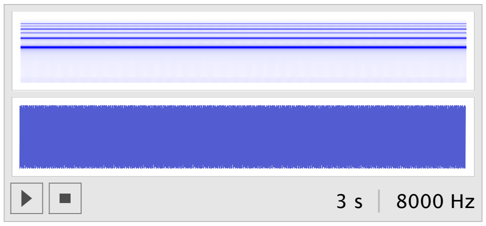
```
instrument1[f_, t_] :=
 0.75*Sin[2 Pi 2*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 4*f*t] + 0.14*Sin[2 Pi 6*f*t] +
  0.5*Sin[2 Pi 8*f*t] + 0.12*Sin[2 Pi 10*f*t] + 0.17*Sin[2 Pi 12*f*t]

Plot[instrument1[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```




```
Plot[instrument1[Bflat3, t], {t, 0, 0.01}]
```

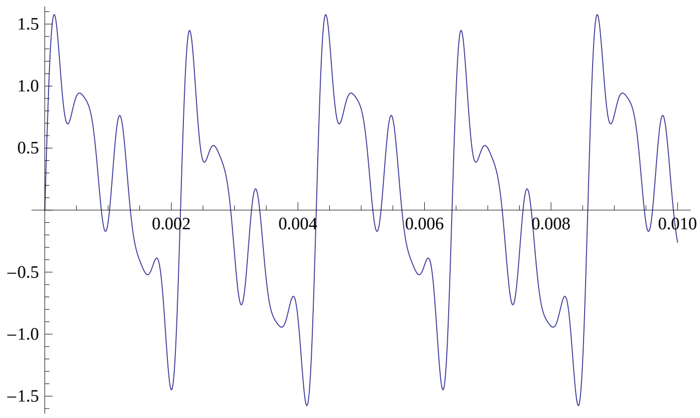



```
Play[instrument1[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```

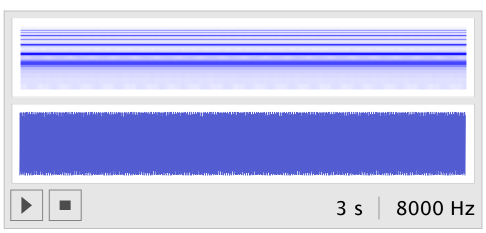



```
instrument1a[f_, t_] :=
 0.3*Sin[2 Pi*f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 2*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 4*f*t] +
  0.14*Sin[2 Pi 6*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 8*f*t] +
  0.12*Sin[2 Pi 10*f*t] + 0.17*Sin[2 Pi 12*f*t]
```

```
Plot[instrument1a[Bflat3, t], {t, 0, 0.01}]
```

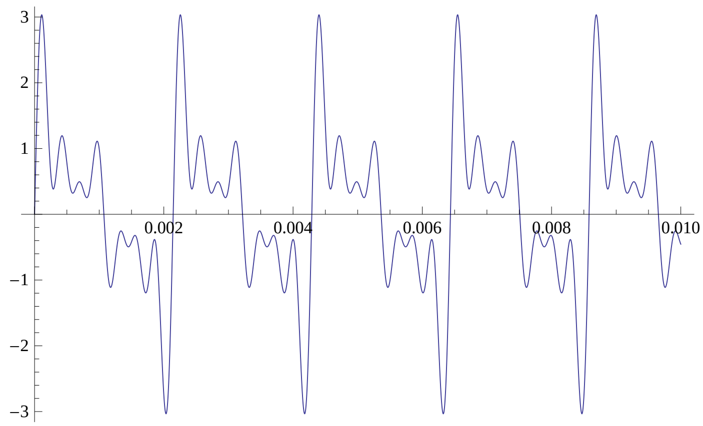



```
Play[instrument1a[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```

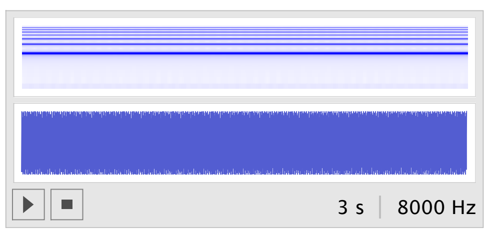



```
instrument2[f_, t_] :=
```

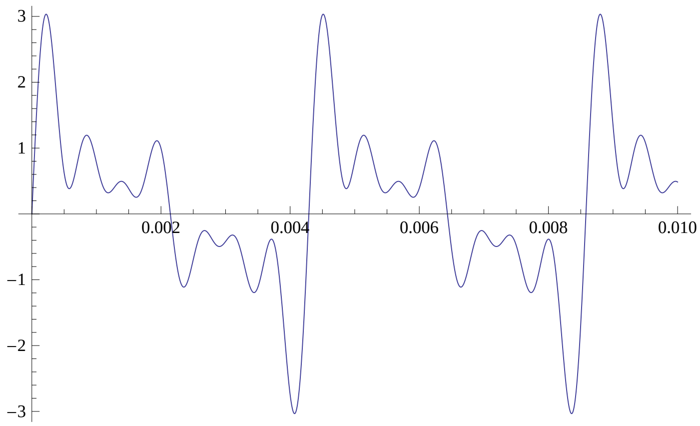
```
 Sin[ 2 Pi 2 f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 4*f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 6*f*t] +
  0.30*Sin[2 Pi 8*f*t] + 0.75*Sin[2 Pi 10*f*t] +
  0.40*Sin[2 Pi 12*f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 14*f*t]

Plot[instrument2[Bflat3, t], {t, 0, 0.01}]
```



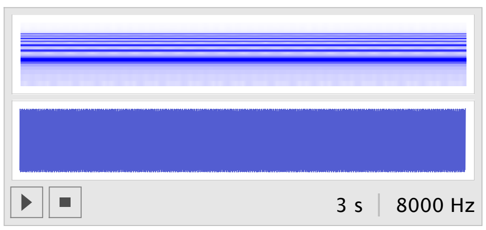

```
Play[instrument2[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```




```
instrument3[f_, t_] :=
 Sin[ Pi 2 f*t] + 0.5*Sin[2 Pi 2*f*t] + 0.75*Sin[ 2 Pi 3*f*t] +
  0.30*Sin[ 2 Pi 4*f*t] + 0.75*Sin[ 2 Pi 5*f*t] +
  0.40*Sin[ 2 Pi 6*f*t] + 0.5*Sin[ 2 Pi 7*f*t]

Plot[instrument3[Bflat3, t], {t, 0, 0.01}]
```




```
Play[instrument3[Bflat3, t], {t, 0, 3}]
```



Bibliografia

[Arb] Arbonés J.; Milrud P.: *La armonía es numérica*. RBA, El mundo es matemático, 2010. ISBN:9788498679434.

[Ben] Benson, D.: *Music: A Mathematical Offering*. http://www.abdn.ac.uk/ mth192/html/music.pdf 2008. ISBN-10: 0521853877, ISBN-13: 978-0521853873.

[DIEC] DIEC2: *Diccionari de la llengua catalana de l'Institut d'Estudis Catalans*. 1995, *http://dlc.iec.cat/*.

[Finale] *Finale 2011*. Software de creació de partitures.

[Gar] Garland, Trudi Hammel; Kahn, Charity Vaughan: *Math and Music: Harmonious Connections*. Dale Seymour Publications, P.O. Box 10888, Palo Alto CA 94303-1879, 1995.

[Math] *Mathematica 8.0*.

[Phy] http://www.phy.mtu.edu/ suits/Physicsofmusic.html.

[Pie] Pierce, John R.: *Los sonidos de la música*. Editorial Labor, 1985. ISNB: 84-7593-009-3.

[Wiki] *Wikipedia, la Enciclopedia Libre* http://es.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Portada.